

## การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและการทดลองเพื่อศึกษาลักษณะการสั่นสะเทือนของ แผ่นเมมเบรนทรงกลมจากคลื่นอะคูสติก

A study of membrane geometric using acoustic wave (theoretical and experimental analysis)

พิพัฒน์ ปราโมทย์<sup>1</sup> และณัฐสิทธิ์ พัฒนะอิม<sup>2</sup>

### บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงถึงผลการทดลองในลักษณะของซิมิวเลชันลักษณะการควบคุมแผ่นเมมเบรน โดยใช้คลื่นอะคูสติก โดยมีการทดลองในโหมดต่างๆ ที่สอดคล้องกับค่าเบสเซลฟังก์ชันที่กำหนด ส่วนการทดลองในเชิงกายภาพนั้นได้ทดลองเปรียบเทียบในเฉพาะโหมดของเบสเซลที่  $m = 0$  เท่านั้น โดยผลการทดลองในส่วนของการจำลองแบบเชิงตัวเลขออกมาสอดคล้องกับทฤษฎีที่ได้คาดการณ์ในช่วงพีกที่ประมาณ 1430 เฮิรซ์ แต่ส่วนผลของการทดลองยังมีความแตกต่างกันระหว่างเมมเบรนในซิมิวเลชันกับเมมเบรนในการทดลองจริงในด้านระยะการเคลื่อนตัว

คำสำคัญ: 1.คลื่นอะคูสติก 2.แผ่นเมมเบรน 3.เบสเซลฟังก์ชัน

### Abstract

In this article, most of the methods were focus on simulation of membrane geometric that was excited by acoustic wave. The experiments were setup with variety acoustic modes corresponding to value of the Bessel function. On the physical tests, the results were able to be compared about mode  $m = 0$  of the Bessel function with the different value of index. The results from the experimental can be categorized only for the peak frequency approximate 1430 Hz. However, there was some degree of different between the simulations and the experiments.

Keywords: 1.acoustic wave, 2.membrane, and 3.Bessel function

### 1. บทนำ

ปัจจุบันยังไม่มีการศึกษาและวิจัยถึงความสัมพันธ์ของรูปแบบและคุณลักษณะของคลื่นอะคูสติกที่มีผลกระทบต่อสื่อกลางชนิดต่างๆอย่างจริงจัง โดยความล่าช้าในการศึกษาในหัวข้อดังกล่าวจะส่งผลต่อการพัฒนาเทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์และการควบคุมคลื่นเสียง และการพัฒนารูปแบบของวัสดุก็เป็นไปได้อย่างล่าช้า นอกจากนี้การพัฒนาด้านเทคโนโลยีที่ใช้ไพโซอิเล็กทริกส์ และเทคโนโลยีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องก็เป็นไปได้ อย่างล่าช้าอีกด้วย มากกว่านั้นคือในเรื่องเทคโนโลยีอนาคตที่เกี่ยวข้องในด้านคลื่นอะคูสติกยังมีไม่มาก และไม่แพร่

หลายเท่าที่ควร ดังนั้นจึงควรมีการศึกษา และพัฒนาความรู้ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีของคลื่นอะคูสติกและผลกระทบกับวัสดุที่เกี่ยวข้องกัน เพื่อให้เป็นการสอดคล้องกับปัญหาดังกล่าว การศึกษาถึงความสัมพันธ์ของรูปแบบ และคุณลักษณะของคลื่นอะคูสติกที่ส่งผลกระทบต่อสื่อกลางชนิดอื่นๆที่เกี่ยวข้องซึ่งจะเป็นการนำไปสู่การพัฒนาเทคโนโลยีขั้นสูงยิ่งขึ้น วัตถุประสงค์ของการวิจัยนี้ก็คือเพื่อสร้างระเบียบวิธีการที่จะใช้การควบคุมรูปร่างของแผ่นเมมเบรน โดยใช้คลื่นอะคูสติก โดยจะมีการควบคุมโหมดต่างๆของคลื่นอะคูสติก เพื่อใช้ควบคุมแรงสั่นสะเทือนในแนวต่างๆ ที่จะกระทำกับแผ่นเมมเบรนที่จะก่อให้เกิด

<sup>1</sup> อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

<sup>2</sup> อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

รูปทรงบนแผ่นเมมเบรนที่สอดคล้องกับคลื่นอะคูสติกที่กำหนดให้ นอกจากนี้ยังเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นอะคูสติกในด่างๆ กับแรงสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในแผ่นเมมเบรนที่สร้างจากวัสดุที่มีคุณสมบัติต่างชนิดกัน การเปรียบเทียบระหว่างโหมดต่างๆ ของเมมเบรนภายใต้สภาวะและเงื่อนไขแวดล้อมภายนอกที่ต่างกัน โดยการวิจัยจะเน้นในด้านการจำลองแบบเชิงตัวเลขของพฤติกรรมของคลื่นอะคูสติกที่ส่งกระทบกับแผ่นเมมเบรนและการทดลองด้านกายภาพที่เกี่ยวข้องสำหรับกรณีวิจัยที่กำหนดขึ้น

**2. การทบทวนวรรณกรรม**

บทความเกี่ยวกับการทดลองเรื่องการสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรนในยุคแรกๆ เริ่มโดย ฟาราเดย์ (Michael Faraday, 1791-1867) อธิบายอย่างถูกต้องถึงปรากฏการณ์การสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรน [5] จากนั้น บอร์เก้ (Bourget) ได้ทำการทดลองเกี่ยวกับแผ่นเมมเบรนในช่วงประมาณปี 1860 [6] และทฤษฎีการสั่นสะเทือนเชิงเส้นของแผ่นเมมเบรนได้เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายซึ่งทฤษฎีนี้เริ่มต้นโดย ออยเลอร์ (Euler) ในปี ค.ศ. 1767 [7] จากนั้น เรย์ลี (Rayleigh) ก็ได้ทำการพิสูจน์ปัญหาในการทดลองเรื่องเมมเบรนของบอร์เก้ รวมไปถึงการฝึกหัดที่เกิดขึ้นตอนกระดาดแข็งตัวและการฝึกหัดเนื่อง จากการเปลี่ยนช่วงพิชิตด้วยความถี่ [6] นอกจากนี้แผ่นเมมเบรนแบบกลมแล้ว เบอ์นาร์ด์และบอร์เก้ (Bernard and Bourget) ยังได้มีการทดลองเกี่ยวกับแผ่นเมมเบรนแบบเหลี่ยมอีกด้วย [8] ในปี ค.ศ. 1956 เบอร์กแมน (Bergmann) [9] ทำการทดลองเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนของฟิล์มที่เกิดจากฟองสบู่ เนื่องจากความหนาที่ไม่สม่ำเสมอของฟองสบู่ ในปี ค.ศ. 1964 ได้มีการทดลองเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรนที่ไม่ใช่เป็นลักษณะเชิงเส้น โดยเป็นการทดสอบเรื่องผลกระทบของระยะการเคลื่อนที่ขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นกับความถี่ [10] ในปี ค.ศ. 1983 องค์การนาซ่าได้เริ่มมีการทำการทดลองเกี่ยวกับการสั่นสะเทือนของแผ่น

เมมเบรน [11] ในเมื่อไม่นานมานี้ เจนกินส์ (Jenkins) [12,13] และผู้ร่วมทดลองอื่นๆ ได้ทำการทดลองโดยใช้การกระตุ้นแบบโลคอลกับแผ่นเมมเบรนที่มีแรงดึงตัวต่ำ โดยพวกเขาค้นพบว่าในช่วงความถี่ที่เหมาะสมนั้นจะมีอัตราการตอบสนองกลับที่ทีจะเกิดขึ้นอย่างมากในบริเวณที่เป็นโลคอล

**3. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง**

สมการคลื่นของระยะการเคลื่อนที่  $\eta$  ของเมมเบรนจะเป็น

$$\eta_{rr} + \frac{1}{r}\eta_r + \frac{1}{r^2}\eta_{\theta\theta} - \frac{1}{c^2}\eta_{tt} = 0 \tag{1}$$

และจะมีความเร็วในการคืบตัวเป็น

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{2}$$

โดย  $T$  คือแรงดึงต่อหน่วยความยาว และ  $\rho$  คือค่ามวลของเมมเบรนต่อหน่วยพื้นที่ สำหรับสมการเวฟที่เกิดขึ้นกับเมมเบรนแบบมีขอบเขตที่เราพิจารณาโดยไม่คิดค่าตัวแปร จะเป็นในลักษณะ

$$\eta = \begin{Bmatrix} J_m(kr) \\ N_m(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \tag{3}$$

ซึ่ง  $k^2 = \omega^2/c^2$  หากแผ่นเมมเบรนในตำแหน่งกำเนิด ( $r = 0$ ) ถูกนำมาพร้อมด้วยแล้ว ค่านิวแมนฟังก์ชันจะใช้ไม่ได้เพราะเกิดซิงกูลาริตี ที่ตำแหน่งดังกล่าว นอกเหนือจากนั้นนิวแมนฟังก์ชันยังคงใช้ได้อยู่

โหมดของการสั่นสะเทือนของเมมเบรนจะอธิบายได้จากค่าเงื่อนไขขอบเขต โดยถ้าเมมเบรนที่บริเวณขอบถูกจับยึดอยู่กับที่จะไม่เกิดค่าระยะขจัดในตำแหน่งนั้น ในกรณีที่รอบวงของเมมเบรนถูกจับยึดในตำแหน่ง ( $r = a$ ) ก็สามารถกำหนดสมการได้ว่า

$$J_m(ka) = 0, \quad m=0,1,2,\dots \quad (4)$$

หรือ

$$ka = \alpha_{mn} \quad (5)$$

ดังนั้นสมการที่แสดงค่าตามโหมด  $(mn)^{th}$  จะได้เป็น

$$\eta_{mn} = J_m\left(\frac{\alpha_{mn} r}{a}\right) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \omega_{mn} t \\ \sin \omega_{mn} t \end{Bmatrix} \quad (6)$$

และค่าความถี่ไอเก้นของโมเดลจะเป็น

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\alpha_{mn} c}{2\pi a} \quad (7)$$

ค่าเงื่อนไขขอบเขตอื่นๆ คือในกรณีที่ขอบของเมมเบรนเป็นอิสระ ในกรณีนี้แรงคืนตัวของขอบของเมมเบรนจะหายไป เพราะว่าแรงคืนตัวจะเป็นสัดส่วนกับการเปลี่ยนแปลงของระยะขจัด โดยค่าบังคับในเชิงคณิตศาสตร์ก็คือ  $\eta_r = 0$  ที่ระยะ  $r=0$  ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็น

$$J'_m(ka) = 0, \quad m = 0,1,2,\dots \quad (8)$$

ซึ่งจะได้

$$ka = \alpha'_{mn} \quad (9)$$

สำหรับคำตอบทั่วไปคือคำตอบสำหรับการคิดรวมในทุกๆ โหมดที่เป็นไปได้ ตัวอย่างเช่นคำตอบทั่วไปสำหรับเมมเบรนแบบวงกลมที่มีการยึดขอบก็คือ

$$\eta = \sum_{m,n} J_m\left(\frac{\alpha_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta - \theta_{0m}) \cdot [A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t] \quad (10)$$

โดยที่ค่าการรวมกันแบบเชิงเส้นของฟังก์ชัน  $\cos m\theta$  และ  $\sin m\theta$  จะถูกเขียนเป็นค่าของฟังก์ชันโคซายน์ที่มีค่ามุมเฟสเป็น  $\theta_{0m}$  ส่วนค่าสัมประสิทธิ์  $A_{mn}$  และ  $B_{mn}$  จะสามารถหาได้จากการใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

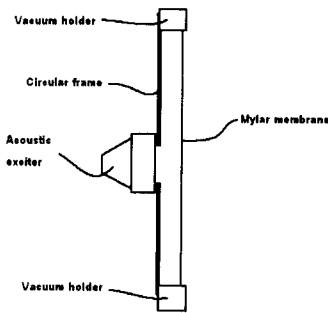
#### 4. ขั้นตอนการวิจัย

ขั้นตอนในการวิจัยจะถูกแบ่งออกเป็นสองตอนด้วยกัน คือ ขั้นตอนการทดลองในเชิงการจำลองแบบเชิงตัวเลข และขั้นตอนการทดลองในเชิงกายภาพ โดยในขั้นตอนแรกจะทำในส่วนของการทดลองในเชิงการจำลองแบบเชิงตัวเลขจะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสุ่มและวิเคราะห์ค่าการสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรน ส่วนการทดลองเชิงกายภาพจะเป็นทดลองหาลักษณะการสั่นสะเทือนของเมมเบรนจริงภายใต้แรงกระตุ้นจากภายนอกโดยเงื่อนไขที่ใช้คือการใช้รูปทรงของเมมเบรนให้เป็นแบบทรงกลม โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตของแผ่นเมมเบรนให้เป็นแบบจับยึดตายตัวตลอดทั้งขอบ และกำหนดให้ความหนาของแผ่นเมมเบรนไม่เกิน 26 ไมครอน ซึ่งในกรณีนี้ได้เลือกใช้คุณสมบัติของแผ่นไมล้าโพลีเอสเตอร์ ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 35 cm มีความหนา 25.4  $\mu\text{m}$  มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (ค่ายังโมดูลัส) อยู่ที่ 3.5 GPa มีความหนาแน่นเป็น 1,400  $\text{kg/m}^3$  ค่าอัตราส่วนปัวซองอยู่ที่ 0.4 ส่วนสื่อที่ส่งผ่านคลื่นอะคูสติกจะเป็นอากาศที่อุณหภูมิ 25  $^{\circ}\text{C}$  และความถี่ที่ใช้ในการทดลองจะอยู่ที่ 1,430 Hz

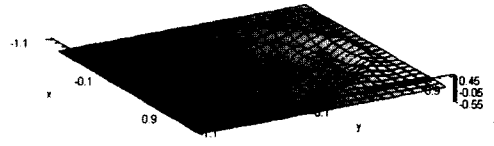
การทดลองจะเริ่มจากค่าตัวแปรข้างต้นนำมาใช้ในการวิเคราะห์คำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งการทดลองในลักษณะของซิมูเลชัน จะทำการทดลองทุกโหมดสำหรับค่า  $m$  และ  $n$  ที่กำหนดให้สอดคล้องกับค่าเบสเซลฟังก์ชันและค่าเงื่อนไขเริ่มต้น โดยนำค่าการสั่นสะเทือนในบริเวณต่างๆ ของแผ่นเมมเบรน มาพล็อตเป็นกราฟสามมิติเพื่อเปรียบเทียบในกรณีต่างๆ กัน จากนั้นนำผลลัพธ์ต่างๆ มาวิเคราะห์เปรียบเทียบกัน

จากนั้นได้สร้างชุดทดลองสำหรับการทดลองทางกายภาพนั้น โดยจะแบ่งออกเป็นส่วนๆ ดังนี้คือ 1. ส่วนของชุดจับยึดแผ่นเมมเบรนโดยใช้ระบบสุญญากาศ โดยอุปกรณ์จะทำการจับยึดแผ่นเมมเบรนให้มีความตึงก่อนที่ทำการทดลอง 2. ส่วนของชุดกำเนิดคลื่นอะคูสติก โดยจะประกอบไปด้วยเครื่องสุ่มการกำเนิดสัญญาณ วงจรขยายสัญญาณ และตัวกระตุ้นแบบไพโซอิเล็กทริกส์ โดยตัว

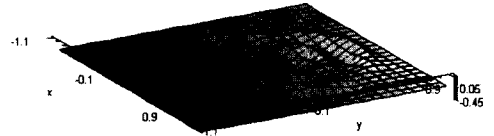
กระตุ้นนี้จะติดตั้งอยู่ในแนวของตำแหน่งศูนย์กลางของแผ่นเมมเบรน 3. ส่วนของการวัดค่าการสั่นสะเทือน โดยใช้เครื่องวิเคราะห์การสั่นสะเทือน และกล้องบันทึกภาพ หลังจากทำการทดลองแล้วก็นำค่าของการทดลองมาวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลการทดลองในเชิงขีโมลูชัน โดยการเปรียบเทียบผลการทดลองในเชิงกายภาพนั้นได้ทดลองเฉพาะโหมดของเบสเซลที่  $m = 0$  เท่านั้น โดยให้ค่า  $n$  มีการเปลี่ยนแปลง



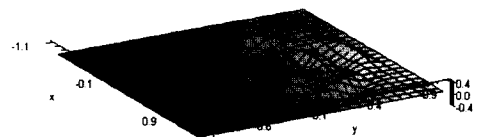
รูปที่ 1 ลักษณะของชุดจับยึดแผ่นเมมเบรนด้วยสูญญากาศ



รูปที่ 3 การจำลองแบบเชิงตัวเลขในโหมด  $m = 1, n = 5$



รูปที่ 4 การจำลองแบบเชิงตัวเลขในโหมด  $m = 2, n = 5$

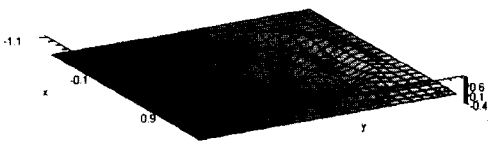


รูปที่ 5 การจำลองแบบเชิงตัวเลขในโหมด  $m = 3, n = 5$

## 5. ผลการทดลอง

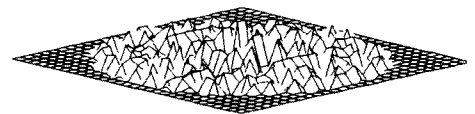
### 5.1 ผลการทดลองในเชิงการจำลองแบบเชิงตัวเลขในโหมด $m=0-3$ และ $n=5$

จากการทำการจำลองแบบเชิงตัวเลขจะเห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าแอมพลิจูดของเบสเซลฟังก์ชันกับค่าอินดีกซ์ของค่าซีโร ซึ่งในกรณีนี้ค่าแอมพลิจูดของเบสเซลฟังก์ชัน  $m = 0-3$  โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองแบบเชิงตัวเลขจะเป็นลักษณะดังรูปต่อไปนี้

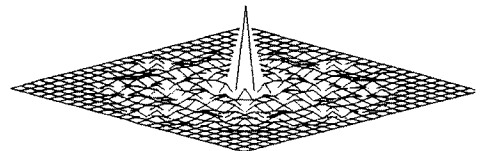


รูปที่ 2 การจำลองแบบเชิงตัวเลขในโหมด  $m = 0, n = 5$

## 5.2 ผลการทดลอง



รูปที่ 6 ลักษณะการสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรนในความถี่ 160 Hz



รูปที่ 7 การลักษณะการสั่นสะเทือนของแผ่นเมมเบรนในความถี่ 1430 Hz