การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย

TWO-DIMENSIONAL PLANE STRESS ANALYSIS BY SMOOTHED FINITE ELEMENT METHOD USING FOUR SMOOTHING DOMAINS CREATED BY ARBITRARY QUADRILATERAL ELEMENTS

วิเชียร จันทร์ชุม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2563

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย

วิเชียร จันทร์ชุม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2563

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยที่เกิดจากการค้นคว้าและวิจัย ขณะที่ข้าพเจ้าศึกษาอยู่ในคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ดังนั้นงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือเป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี และข้อความต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอรับรองว่าไม่มีการคัดลอกหรือนำงานวิจัยของผู้อื่นมานำเสนอในชื่อของข้าพเจ้า

This thesis consists of research materials conducted at the Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Thanyaburi and hence the copyright owner. I hereby certify that the thesis does not contain any forms of plagiarism.

....

(วิเชียร จันทร์ชุม)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใดๆ แบบ 4 ส่วนย่อย Two-dimensional Plane Stress Analysis by Smoothed Finite Element Method Using Four Smoothing Domains Created by Arbitrary Quadrilateral Elements
ชื่อ – นามสกุล	นายวิเชียร จันทร์ชุม
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา	2563

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไผ่งาม, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์จตุพล ตั้งปกาศิต, ปร.ด.)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิวกร อ่างทอง, Ph.D.)
วันที่ 17 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2564

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย
ชื่อ-นามสกุล นายวิเชียร จันทร์ชุม
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา 2563

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติ ด้วยการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย โดยทำการศึกษาผลของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบกำหนดอัตราส่วนความยาวของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวของเอลิเมนต์หลักที่เท่ากันทั้งสองแกน จำนวน 3 ช่วงคือ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 วิเคราะห์ร่วมกับการแบ่งโครงตาข่ายเอลิเมนต์จำนวน 5 ชุด คือ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ

ปัญหาที่ใช้สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ เป็นปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายรับแรงกระทำซึ่งมีการกระจายตัวเป็นรูปพาราโบลาในแนวดิ่งที่ปลายคานเป็นตัวอย่างในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ ทำการวิเคราะห์โดยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) โดยกำหนดจำนวนการแบ่งโครงตาข่ายของเอลิเมนต์หลักเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า สำหรับเอลิเมนต์สม่ำเสมอย่อยภายในเอลิเมนต์หลักนั้น ทำการแบ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมโดยขึ้นอยู่กับค่าของอัตราส่วนความยาวของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวของเอลิเมนต์หลักร่วมกับการอาศัยหลักการความสมมาตรของรูปทรงแบบ semi-unit-cell ผลของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้ จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) และความเค้นเฉือน (shear stress) ที่หน้าตัด L/2 และ L/4 ตามลำดับ

ผลการวิจัยพบว่า ที่อัตราส่วนความยาวของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวของเอลิเมนต์หลัก และจำนวนของโครงตาข่ายมีค่ามากที่สุดนั้น ค่าความแตกต่างของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานจากการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีมีค่าเป็นร้อยละ 0.09 ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของความเค้นตั้งฉากที่ระยะ L/2 มีค่าเป็นร้อยละ 1.11 และที่ระยะ L/4 มีค่าเป็นร้อยละ 1.03 ค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของความเค้นเฉือนในระนาบที่ระยะ L/2 มีค่าเป็นร้อยละ 2.26 ตามลำดับ การเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนความยาวของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวของเอลิเมนต์หลักในโครงตาข่ายที่หยาบ ส่งผลให้การคำนวณค่าความเค้นตั้งฉากเข้าใกล้ค่าจากทฤษฎีได้อย่างชัดเจน ในขณะที่ค่าความของเค้นเฉือนนั้น การเพิ่มขึ้นของค่าอัตราส่วนดังกล่าว ไม่ได้ส่งผลให้ผลการคำนวณเข้าใกล้ค่าจากทฤษฎีอย่างมีนัยสำคัญมากกว่าการเพิ่มจำนวนของการแบ่งเอลิเมนต์

คำสำคัญ : สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ โดเมนสม่ำเสมอย่อย เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า คานยื่นปลาย ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ความเค้นตั้งฉาก ความเค้นเฉือน

Thesis Title	Two-dimensional Plane Stress Analysis by Smoothed Finite Element Method Using Four Smoothing Domains Created by Arbitrary Quadrilateral Elements
Name-Surname	Mr. Wichian Janchum
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Assistant Professor Kamtornkiat Musiket, Ph.D.
Academic Year	2020

ABSTRACT

This research proposes an application of the Smoothed Finite Element Method (SFEM) in smoothed strain field construction with four smoothing cells created by the arbitrary quadrilateral elements for two-dimensional plane stress analysis. The study examined the creation of smoothing domains by defining three modes for the ratio of the length of sub-element and that of main element (0.2-0.3, 0.3-0.4 and 0.4-0.5) analyzed with 5 sets of mesh in different sizes assigned as 16x4, 24x6, 32x8, 40x10, and 48x12 respectively.

Plane stress problem employed by this research involved with the utilization of cantilever beam subjected to parabola traction at the free end to formulate the mathematical model. Data analysis was conducted by Smoothed Finite Element Method (CS-FEM) with determined number of quadrilateral elements resulted from meshing technique. For smoothing domains within a main element, we divided the main element into rectangles based on the ratio of the length of sub-element to main element and "semi-unit cell" symmetrical concept. The results of the numerical analysis, then, were compared to the exact solutions including displacement, normal stress, and shear stress with cross section at L/2 and L/4, respectively.

The findings showed that regarding to the ratio of the length of smoothed element to main element and the finest mesh, the percentage difference of the tip displacement compared to the exact solutions was 0.09%. The mean difference for normal stress was 1.11% at distance L/2 and 1.03% at distance L/4, while the mean difference for shear stress with cross section at L/2 was 2.26%. The increase of the ratio of the length of smoothed element and that of coarse mesh improved the accuracy of normal stress value close to theoretical number. However, for shear stress, this increase did not significantly generate numerical results close to the exact solutions than the increase in number of element distribution.

Keywords: smoothed finite element, smoothed element, quadrilateral element, cantilever beam, 2D plane stress problem, normal stresses, shear stress

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณาและความอนุเคราะห์ช่วยเหลือเป็นอย่างดีจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกตุ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ตลอดจนติดตามความก้าวหน้าในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้อย่างใกล้ชิดด้วยดีมาตลอดนับตั้งแต่เริ่มต้น จนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จเรียบร้อยสมบูรณ์ ผู้ทำการศึกษาวิจัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม ประธานกรรมการสอบ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จตุพล ตั้งปกาศิต กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขข้อบกพร่องของงานวิจัยรวมทั้งเสียสละเวลามาเป็นคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล กรรมการและผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ได้ให้ความกรุณาเสียสละเวลามาร่วมเป็นคณะกรรมในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำในด้านต่างๆ อันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดา มารดา และบูรพาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนวิชาความรู้ ตลอดจนเพื่อนสนิทมิตรสหายและทุกคนในครอบครัว ที่คอยให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจด้วยดีในการจัดทำวิทยานิพนธ์ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจศึกษางานวิจัยทางด้านนี้ และหากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ขาดตกบกพร่องหรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

วิเชียร จันทร์ชุม

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

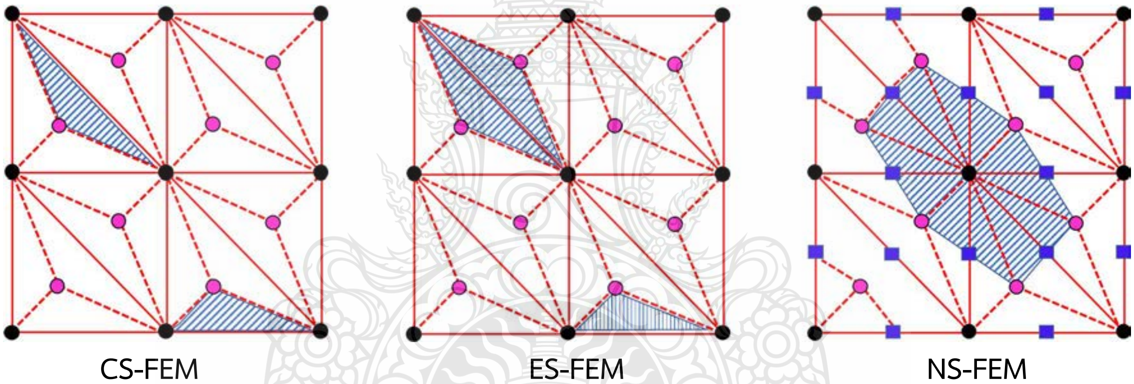
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไปส่วนใหญ่มักจะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknown variables) กับสิ่งที่ทราบค่าแล้ว (Constraints) ให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (Ordinary differential equations) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ในลำดับต่าง ๆ กัน บ่อยครั้งที่พบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นมีความสลับซับซ้อนอันเนื่องมาจากหลายส่วนเช่น ความซับซ้อนของรูปทรงเรขาคณิตของปัญหา ความซับซ้อนอันเนื่องมาจากความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้นระหว่างตัวแปรที่ไม่ทราบค่ากับตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว รวมถึงอนุพันธ์ลำดับสูงของสมการ เป็นต้น สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ ทำให้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ไม่สามารถแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาได้ นักวิจัยได้คิดค้นวิธีการใหม่ๆ เพื่อตอบสนองความต้องการที่จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่สลับซับซ้อนนั้นโดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical methods) เข้ามาแก้ปัญหา คำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีทางตัวเลขนี้ถึงแม้ว่าจะมีความแม่นยำเพียงพอที่จะใช้อธิบายพฤติกรรมทางกายภาพที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น แต่ก็ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่แท้จริง (Exact solution) เป็นเพียงแค่ผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate solution) เท่านั้น การลู่เข้าของผลเฉลยโดยประมาณไปสู่ผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหาทางด้านวิศวกรรมนั้น ขึ้นอยู่กับแนวคิดและกรรมวิธีของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขต่าง ๆ นั่นเอง

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมากมายได้ถูกเสนอมาตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันเพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่นับวันจะมีความสลับซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เริ่มตั้งแต่ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรน (Finite different method, FDM) วิธีไฟไนต์วอลลุม (Finite volume method, FVM) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method, FEM) วิธีเอลิเมนต์ขอบ (Boundary element method, BEM) วิธีสเปคตรัลเอลิเมนต์ (Spectral element method, SEM) วิธีเมสอิสระ (Meshless methods) วิธีเอลิเมนต์เสมือน (Virtual element method, VEM) และวิธีสเกลบาวดารีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Scaled boundary finite element method, SBFEM) เป็นต้น ในบรรดาวิธีการเหล่านี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1,2,3] ถือเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการคิดค้นพัฒนาวิธีการใหม่ๆขึ้นมา รวมทั้งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ ด้วยเช่นกัน หลักการสำคัญของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเหล่านี้คือการพยายามเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านั้นซึ่งอยู่ในรูปที่เรียกว่า “Strong form” ให้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตที่เรียกว่า “Weak form” หรือ “Integral form” ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายกว่า ถึงแม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั่วโลกอันเนื่องมาจากความสามารถในการแก้ปัญหาได้อย่างไม่จำกัด แต่ก็ยังคงมีข้อด้อยที่ต้องได้รับการปรับปรุงหลายอย่าง ไม่ว่าจะเป็นเรื่องของปัญหาสติฟเนสที่มากเกินจริง (Over stiff) ความแม่นยำเที่ยงตรงของค่าความเค้น (Stress accuracy) รวมไปถึงการบิดเบี้ยวของโครงตาข่าย (Mesh distortion) ภายใต้การเสียรูปมาก (Large deformation) เป็นต้น

การวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed finite element methods, SFEM) ได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกโดย G.R. Liu และคณะ [4] เพื่อแก้ปัญหาทั้งในส่วนของสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์ ซึ่งเป็นการพัฒนาต่อยอดจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิม (Finite element method, FEM) หัวใจสำคัญของการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอที่แตกต่างจากไฟไนท์เอลิเมนต์คือการสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed strain field) โดยตรงจากการเปลี่ยนตำแหน่งที่สมมุติไว้แล้วด้วยการใช้ Smoothed Galerkin weak form โดยยังคงมีคุณสมบัติของความเสถียรและการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรงไม่น้อยไปกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบปกติ ส่วนขั้นตอนอื่น ๆ ของการวิเคราะห์เช่นการหาสติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์ การรวมกันเพื่อสร้างสติฟเนสหลักของทั้งโดเมน การแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น ยังคงใช้ขั้นตอนเดียวกันกับที่ใช้ในขั้นตอนของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง

การสร้างโดเมนสม่ำเสมอสำหรับปัญหาในสองมิตินั้น สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 แบบด้วยกัน คือ แบ่งโดยใช้เอลิเมนต์ (CSFEM) แบ่งโดยใช้ขอบ (ESFEM) และแบ่งโดยใช้โหนด (NSFEM) ดังแสดงในรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบต่าง ๆ

วิธี SFEM สามารถแก้ปัญหาโดยให้ค่าความถูกต้องของความเค้นรวมทั้งค่าอื่น ๆ ที่สนใจสูงกว่าวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ [4] เนื่องจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ใช้รูปแบบของ Galerkin weak form ตัวแปรความเครียดสม่ำเสมอจึงมีคุณสมบัติออโธโกนอล (Orthogonal) กับตัวแปรความเครียดในไฟไนท์เอลิเมนต์ คุณสมบัตินี้ ทำให้คำตอบที่ได้จากวิธี SFEM มีค่าเป็นขอบเขตล่างของปัญหาเมื่อเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งถือว่าเป็นขอบเขตบน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือผลเฉลยที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ เป็นคำตอบที่อยู่ระหว่างคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั่นเอง [5] โดเมนสม่ำเสมอซึ่งถูกสร้างบนพื้นฐานของเอลิเมนต์ที่มีหลายด้าน (Polygonal elements) นั้นถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย Dai K. และคณะ [6] โดยทางทฤษฎีแล้ว เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านนี้ สามารถเป็นได้ทั้งเอลิเมนต์ที่มีด้านยื่นเข้าไปหรือยื่นออกจากเอลิเมนต์ หาก SFEM ถูกใช้โดยมีเพียงหนึ่งเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอสำหรับแต่ละเอลเมนต์ในขอบเขตของปัญหา

นั้น ผลเฉลยที่ได้ จะใกล้เคียงหรือเท่ากันกับ FEM ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่ด้านร่วมกับการใช้ Reduced integration Gauss's rule [5] นอกจากนี้ Liu G. และคณะ [7] ยังได้เสนอวิธีการที่เรียกว่า αFEM ซึ่งสนามความเครียดที่สมมุติขึ้นนั้นจะได้มาจากการนำเอาค่าเฉลี่ยของความเครียดที่จุดต่อของเอลิเมนต์โดยการใช้แฟกเตอร์ที่ปรับค่าได้ α ไปรวมกับความเครียดที่คำนวณได้จาก FEM ปกติ วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักนี้ส่วนใหญ่ใช้การประมาณเชิงเส้นของโพลิโนเมียล (Linear polynomial interpolation method, LPIM) สำหรับการสร้างฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในของเอลิเมนต์ บางครั้ง อาจเลี่ยงไม่ได้ที่จะต้องใช้การประมาณแบบโพลิโนเมียลทั่วไปสำหรับการสร้างฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์และนำไปสู่คุณสมบัติซิงกูลาร์ของเมทริกซ์โมเมนต์ (Moment matrix) เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงการมีคุณสมบัติซิงกูลาร์ดังกล่าว Liu G. และคณะ [8] ได้ใช้เทคนิค RPIM (Radial point interpolation method) สำหรับการสร้างฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์หลักรูปสามเหลี่ยม ในกรณีที่มีการทำงานร่วมกันของคอมพิวเตอร์ช่วยในงานออกแบบ (Computer aided design, CAD) และการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ที่รู้จักกันดีในชื่อ Isogeometric analysis (IGA) นั้น Hamrani A. และคณะ [9] ได้ใช้วิธี Cell-based สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ประยุกต์ใช้ร่วมกับ NURBS-based IGA เพื่อแก้ปัญหาโจทย์ใน 2 มิติและสามารถแสดงให้เห็นอย่างเด่นชัดถึงข้อดีอันหนึ่งของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นคือ การไม่ต้องคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ NURBS [10] นอกจากนั้น ในวิธี Cell-based SFEM ซึ่งถือว่าเป็นวิธี SFEM ที่เป็นพื้นฐานนั้น ยังได้ถูกนำไปศึกษาอย่างแพร่หลายกับปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาของการแตกหักในสองมิติ โดยใช้ร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) [11] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นบางและแผ่นเปลือกบาง (Plate and Shell) [12] ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ (Dynamics) [13] เป็นต้น

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวนสี่ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักทรงเหลี่ยมสี่หน้า ความยาวแต่ละด้านของโดเมนย่อยนี้ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วน (α) เทียบกับความยาวเดิมของเอลิเมนต์หลัก จำนวนของเอลิเมนต์หลักที่สร้างขึ้นนี้ ได้มาจากการสร้างโครงตาข่ายทรงเหลี่ยมสี่หน้าจตุรัสด้วยโปรแกรม MATLAB [14] โดยมีอัตราส่วนของโครงตาข่ายในแนวนอนต่อแนวดิ่งเป็น 4:1 สอดคล้องกับอัตราส่วนขนาดของคานยื่นปลายที่ทำการศึกษาเพื่อป้องกันการเกิดพฤติกรรมของคานที่เรียกว่า Shear locking [15] หลักความสมมาตรของการทำให้รูปร่างของโดเมนย่อยสม่ำเสมอมีลักษณะเป็น Representative volume element (RVE) ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อให้โดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นมีความต่อเนื่องกัน

การศึกษาในครั้งนี้ได้แบ่งหัวข้อดำเนินการออกเป็นส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ สมการของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จะกล่าวไว้ในส่วนที่สอง ตามด้วยส่วนที่สามซึ่งจะกล่าวถึงขอบเขตและตัวอย่างของโครงสร้างคานยื่นปลายในสองมิติซึ่งจะใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB ในส่วนที่สี่จะกล่าวถึงผลการเปรียบเทียบของคำตอบที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์กับผลเฉลยแม่นตรง

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

งานวิจัยครั้งนี้เพื่อศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติโดยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย โดยมีวัตถุประสงค์หลักๆดังนี้

1.2.1 เพื่อศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบผลของการวิเคราะห์วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ โดยการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 4 ส่วนย่อยกับผลเฉลยแม่นตรง

1.2.3 เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ของอัตราส่วนความยาวด้านของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวด้านของเอลิเมนต์หลัก (α) ในการสร้าง Smoothing domain ที่มีผลต่อการวิเคราะห์ปัญหาใน 2 มิติ ด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ

1.2.4 เพื่อศึกษาผลของการกำหนดจำนวนโครงข่ายเอลิเมนต์ (mesh) ที่มีต่อการวิเคราะห์ปัญหาใน 2 มิติ ด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะดำเนินการศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาใน 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย โดยใช้ปัญหาตัวอย่างเป็นคานยื่นปลาย ด้านขวามือมีแรงกระทำที่ปลายคานกระจายเป็นรูปพาราโบลา ปลายคานด้านซ้ายมือเป็นจุดรองรับมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (HINGE SUPPORT) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึก ที่ขอบด้านบนและด้านล่างมีสภาพเป็นที่รองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวดิ่ง (ROLLER SUPPORT) ดังรูปที่ 1.2 ดำเนินการวิจัยโดยใช้โปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือช่วยในการใช้ทฤษฎีการการวิเคราะห์แก้ปัญหา มีการกำหนดขอบเขตของการวิจัย ดังต่อไปนี้

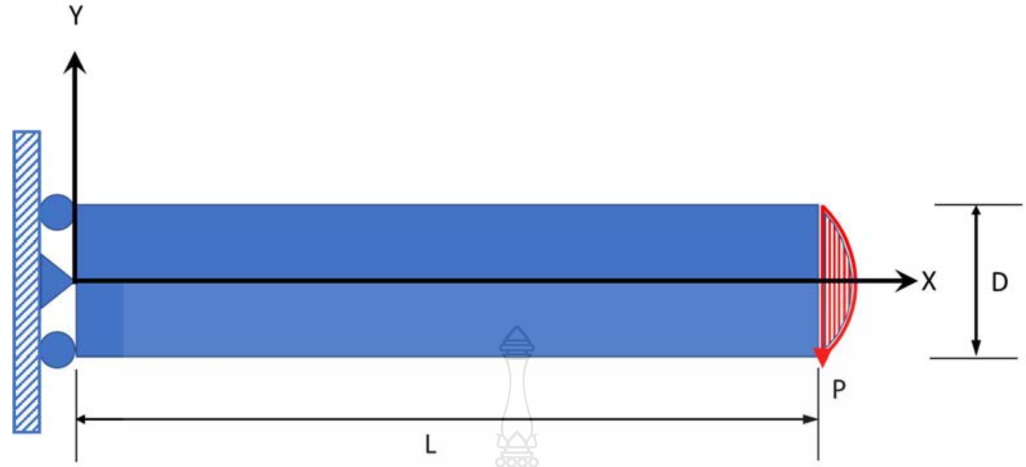
1.3.1 ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างโดเมนความเครียดแบบสม่ำเสมอของเอลิเมนต์จากเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (Polygonal elements)

1.3.2 การวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างจะใช้วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (CS-FEM) โดยการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นจำนวน 4 โดเมนย่อย (smoothing domain) ด้วยวิธีการสุ่มบนช่วงอัตราส่วน α ของความยาวในแต่ละด้านของแต่ละเอลิเมนต์

1.3.3 การคำนวณวิเคราะห์กำหนดจำนวนโครงข่ายเอลิเมนต์ (mesh) เพื่อเปรียบจำนวน 5 ชุด โครงข่าย คือ 16x4 , 24x6 , 32x8 , 40x10 และ 48x12

1.3.4 ทำการวิเคราะห์ปัญหาเฉพาะทางวิศวกรรมโยธาที่เป็นปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบแบบ 2 มิติ

1.3.5 ผลการการวิเคราะห์จะทำการเปรียบเทียบเฉพาะ การเคลื่อนตัวของปลายคาน (Displacement of Beam) , ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stresses) และ ความเค้นเฉือนในระนาบ (Shear Stress) กับผลเฉลยแม่นตรง (EXACT SOLUTION)



รูปที่ 1.2 ปัญหาคานยื่นปลายสำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ทำให้ทราบถึงองค์ความรู้เกี่ยวกับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นของของแข็งใน 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (CS-FEM)

1.4.2 ทำให้ทราบถึงองค์ความรู้ด้านอัลกอริทึ่มของการเขียนโปรแกรมการวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

1.4.3 ทำให้ทราบถึงพารามิเตอร์ที่มีผลต่อการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (CS-FEM)

1.4.4 ทำให้ทราบถึงหลักการในการประยุกต์ใช้วิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ (CS-FEM) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นและความเครียดใน 2 มิติประเภทอื่น ๆ ในงานวิศวกรรมโยธา

1.4.5 ทำให้สามารถนำองค์ความรู้จากงานวิจัยครั้งนี้ ไปใช้ในการต่อยอดองค์ความรู้และเป็นข้อมูลพื้นฐานที่สำคัญ สำหรับการพัฒนาการเลือกโดเมนสำหรับสร้างเอลิเมนต์ที่สามารถให้ผลการคำนวณที่มีความแม่นยำสูงในขณะเดียวกันก็ใช้เวลาในการคำนวณสั้นลง

บทที่ 2
วรรณกรรมหรืองานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equations for 2D Linear Elasticity)

พิจารณาโดเมน Ω ของรูปทรงใด ๆ ในสองมิติที่มีวัสดุเป็นเนื้อเดียวกันและมีพฤติกรรมเป็นแบบเชิงเส้น โดเมนนี้ ถูกกำหนดให้อยู่ภายในขอบเขตของ Γ โดยที่ $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t, \Gamma_u \cap \Gamma_t = 0$ เมื่อ Γ_u และ Γ_t คือ เงื่อนไขขอบแบบ Dirichlet และ Neumann ตามลำดับ สมการสมดุลสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์เทนเซอร์ (Tensor notations) ได้เป็น

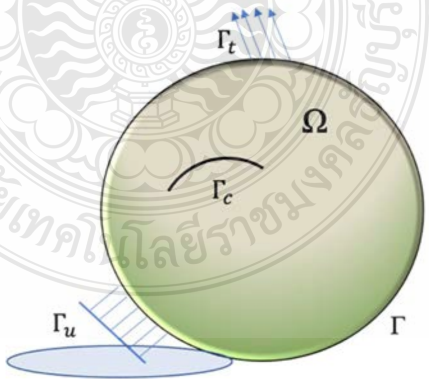
$$\nabla.\sigma + f^b = 0 \tag{1}$$

เมื่อ ∇ คือ ไดเวอร์เจนต์โอเปอเรเตอร์ (Divergence operator) σ คือ Cauchy stress tensor และ f^b คือ น้ำหนักของวัตถุ โดยที่ เงื่อนไขขอบทั้งสองนั้น ถูกกำหนดว่าเป็น

$$u = \bar{u} \quad \text{บน } \Gamma_u \tag{2}$$

$$\sigma.n = f^t \quad \text{บน } \Gamma_t \tag{3}$$

เมื่อ n คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากออกจากขอบของโดเมน และ $\bar{u}$ คือการเปลี่ยนตำแหน่งที่ทราบค่าแล้วบนขอบเขต Γ_u ดังแสดงตามรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 โดเมนและขอบเขตของปัญหา

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ constitutive equation หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า กฎทั่วไปของฮุค กล่าวคือ

$$\sigma = C:\varepsilon \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

ภายใต้เงื่อนไขของสมมุติฐานที่ว่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย ๆ (small-displacement theory) นั้น สมการความสอดคล้องที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง strain tensor ε_{ij} กับการเคลื่อนที่สามารถแสดงได้เป็น

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\nabla u + \nabla u^T\right] \tag{5}$$

สมการที่ 1-3 รวมเรียกว่า Strong form ซึ่งจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่เรียกว่า Weak form เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยการสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์ต่อไป การเปลี่ยนรูปดังกล่าวนี้ สามารถทำได้สองวิธีด้วยกันคือทั้งการใช้วิธีหลักของพลังงาน (Energy method) หรือวิธีการถ่วงเศษน้ำหนัก (Weighted residual methods) ตกค้างขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติสำหรับวัสดุที่เป็น Isotropic linear elastic material นั้น การสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์ นิยมเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์เพื่อความสะดวกได้ดังนี้

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \qquad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \tag{6}$$

และนิยมเขียนให้อยู่ในรูปของ Voigt notation เพื่อความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ

$$\sigma = \left[\sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{xy}\right]^T, \qquad \varepsilon = \left[\varepsilon_{xx}\,\varepsilon_{yy}\,\varepsilon_{xy}\right]^T \tag{7}$$

ในขณะที่เทนเซอร์ C สำหรับปัญหาในความเค้นในสองมิติลดรูปลงเป็น

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

และไดเวอร์เจนต์โอเปอเรเตอร์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสองมิติได้เป็น

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{9}$$

หากพิจารณาการสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการใช้วิธีเศษถ่วงน้ำหนักตกค้างโดยคูณสมการที่ 1 ด้วยฟังก์ชันทดสอบ V แล้วทำการอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาจะได้ว่า

$$\int_{\Omega} V^T L^T \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} V^T f^b \, d\Omega = 0 \tag{10}$$

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) ร่วมกับเงื่อนไขขอบตามสมการที่ 2 และ 3 จะได้ว่า

$$\delta V^T \left[\int_{\Omega} \left(B^T D B \right) u \, d\Omega - \int_{\Omega} f^b \, d\Omega - \int_{\Gamma} f^t \, d\Gamma \right] = 0 \tag{11}$$

หากต้องการให้สมการที่ 11 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันทดสอบใด ๆ ค่าภายในวงเล็บต้องมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกไฟไนท์เอลิเมนต์เล็ก ๆ ที่ถูกแบ่งจากโดเมนของปัญหานั่นเอง ดังนั้น สมการไฟไนท์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ สามารถแสดงได้เป็น

$$Ku = F \tag{12}$$

โดยที่

$$F = \sum_e F^e = \sum_e \left(\int_{\Omega} N^T f^b \, d\Omega + \int_{\Gamma} N^T f^t \, d\Gamma \right) \tag{13}$$

เมื่อ K, F, u, N คือ สติฟเนสเมทริกซ์ เวคเตอร์ของแรงกระทำที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ การเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์และฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในของเอลิเมนต์ตามลำดับในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (Global system)

2.2 การสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field Construction)

ลำดับขั้นตอนการทำงานของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น มีความคล้ายคลึงกับวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์แทบทุกขั้นตอน เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่มีหลายด้าน (N-sided polygonal element) ทำการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอโดยอาศัยเทคนิคของ

Strain/gradient smoothing บนโดเมนสม่ำเสมอที่อยู่ภายในทุก ๆ เอลิเมนต์ ขั้นตอนนี้เป็นเพียงขั้นตอนเดียวที่แตกต่างจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ ขั้นตอนอื่น ๆ นอกเหนือจากนี้ เช่น การสร้างสมการ Weak form การกำหนดเงื่อนไขขอบ การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยมาประกอบกันเข้าเป็นสมการในระบบหลัก การแก้สมการในระบบหลักเพื่อหาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง รวมไปถึงการคำนวณกลับมาเพื่อหาค่าความเค้น ความเครียดและปริมาณอื่น ๆ ที่ต้องการ ล้วนแล้วแต่ดำเนินการไปในทิศทางเดียวกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์โดย สนามความเครียดสม่ำเสมอที่ต้องการนี้ได้มาจากการคำนวณโดยใช้ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดที่อยู่บนด้านของโดเมนสม่ำเสมอจึงทำให้สามารถใช้กับเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านซึ่งเป็นข้อดีที่เหนือกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ เนื่องจากการประมาณภายในของการเคลื่อนที่ของจุดต่อที่อยู่บนด้านของเอลิเมนต์ทุกเอลิเมนต์ภายในโดเมนสม่ำเสมอเป็นแบบเชิงเส้น จึงส่งผลให้มีความต่อเนื่องของการเคลื่อนที่ของทั้งโดเมนสำหรับปัญหานี้

วิธีการที่เรียกว่า Strain/gradient smoothing ถือว่าเป็นวิธีที่ง่ายและสะดวกที่สุดสำหรับการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ สำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ ซึ่งขึ้นอยู่กับสมมุติฐานที่ว่าความเครียด ณ ตำแหน่งใด ๆ ภายในโดเมนสม่ำเสมอ ได้มาจากการทำให้ความเครียดแบบเดิมที่ใช้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Compatible strain field) เกิดการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนสม่ำเสมอที่กำลังสนใจนั้น นอกจากนี้ ยังสมมุติว่า ความเครียดสม่ำเสมอภายในโดเมนสม่ำเสมอที่ได้นั้นมีค่าคงที่ [5]

ในกรณีที่ความเครียดแบบเดิมที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่เรียกว่า Compatible strain field นี้ สามารถหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเคลื่อนที่ (Strain-displacement relation) และกำหนดให้เป็น ε แล้วนั้น ความเครียดแบบสม่ำเสมอ $\bar{\varepsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_i ใด ๆ สามารถหาค่าได้จากสมการที่ 14 [16]

$$\bar{\varepsilon}(x_i) = \int_{\Omega} \varepsilon(x) W(x_i - x) d\Omega = \int_{\Omega} L\bar{u}(x) W(x_i - x) d\Omega \tag{14}$$

โดยที่ $W(x_i - x)$ คือฟังก์ชันน้ำถ่วงหนักของตำแหน่งที่สนใจโดยที่ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักนี้จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ใน Chen JS. และคณะ [17] เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จะกำหนดให้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักนี้อยู่ในรูปของ Heaviside step function ดังนี้คือ

$$W(x_i - x) = \begin{cases} \dfrac{1}{A_i^S}, & x \in \Omega_i^S \\ 0, & x \notin \Omega_i^S \end{cases} \tag{15}$$

เมื่อ $A_i^S = \int_{\Omega_i^S} d\Omega$ คือพื้นที่ของโดเมนสม่ำเสมอ ในกรณีที่ความเครียดแบบเดิมสามารถหาได้ง่าย สามารถคำนวณหาความเครียดแบบสม่ำเสมอได้โดยตรงซึ่งส่งผลให้ความเครียดแบบสม่ำเสมอสำหรับ

วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้คงที่ภายในโดเมนสม่ำเสมอที่กำหนดไว้นั่นเอง ในกรณีที่การหาค่าของความเครียดแบบดั้งเดิมสามารถทำได้ยาก การเปลี่ยนจากความเครียดมาเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งแทนแล้วใช้ทฤษฎี *Green-Gauss* จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้เป็นอย่างดี กล่าวคือ

$$\bar{\varepsilon}(x_i) = \int_{\Omega} L\,\bar{u}(x) W(x_i - x) d\Omega = \frac{1}{A_i^S} \int_{\Gamma} L_n(x) \bar{u}(x) d\Gamma \tag{16}$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเมทริกซ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากออกจากด้านของ Γ

หากแทนค่าการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ $\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i \bar{u}_i(x)$ ลงในสมการที่ 16 แล้วทำการจัดรูปสมการเสียใหม่จะได้

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{B}_1(x)\ \bar{B}_2(x) \cdots \bar{B}_n(x) \right] \bar{d} = \bar{B}(x) \bar{d} \tag{17}$$

โดยที่ $\bar{B}$ คือเมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (Global smoothed strain-displacement matrix) ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\bar{B}_I(x) = \frac{1}{A_i^S} \int_{\Gamma} L_n(x) N_I(x) d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \tag{18}$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_i^S} \int_{\Gamma} n_i(x) N_I(x) d\Gamma,\ i = x, y \ \text{ และ } \ I = 1, 2, \cdots N_n \tag{19}$$

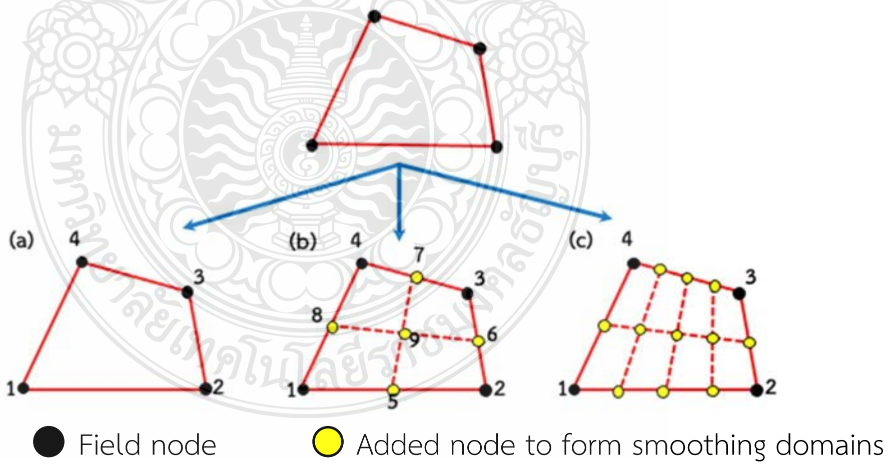
สมการที่ 19 เป็นสมการอินทิเกรตในหนึ่งมิติของขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอนั่นเอง เช่นเดียวกันกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ สามารถใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ *(Gauss quadrature rules)* เข้ามาช่วยได้ หากการเปลี่ยนตำแหน่งที่ใช้บนแต่ละด้านของเอลิเมนต์นั้นมีการแปรผันแบบเชิงเส้น ตำแหน่งของเกาส์เพียงแค่หนึ่งจุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางด้านก็เพียงพอที่จะให้ค่าการประมาณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลมีความถูกต้องถึงกำลัง $2n^G - 1 = 1$ เมื่อ n^G จำนวนจุดของเกาส์ ดังนั้น เครื่องหมายอินทิเกรตในสมการที่ 19 สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_i^S} \sum_{j=1}^{n_\Gamma^S} n_{i,j}(x) N_I(x_j^G) L_j, \; i = x, y \tag{20}$$

เมื่อ n_Γ^S คือจำนวนด้านของเซลล์ที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอและ x_j^G คือตำแหน่งของจุดเกาส์ ณ กึ่งกลางด้านนั้น ๆ $n_{i,j}$ คือเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากด้านของเซลล์และ L_j คือความยาวด้านของเซลล์นั้นตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งเป็นเมทริกซ์สำคัญสำหรับการคำนวณหาสติฟเนสเมทริกซ์ต่อไปนั้น ไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ ทำให้สามารถทำงานได้เร็วกว่าวิธีแบบเดิมมากสำหรับปัญหาที่มีจำนวนเอลิเมนต์มาก

2.3 โดเมนสม่ำเสมอโดยการแบ่งเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Cell-based Quadrilateral Smoothing Domain)

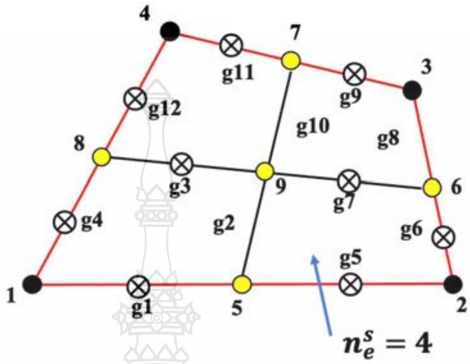
งานวิจัยในครั้งนี้ ใช้การแบ่งโดเมนใหญ่ของทั้งปัญหาออกเป็นโดเมนย่อย ๆ โดยใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) เป็นเอลิเมนต์หลักดังแสดงในรูปที่ 2.2 เอลิเมนต์หลักดังกล่าว จะถูกนำมาแบ่งออกเป็นส่วนย่อยที่เรียกว่าโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain, SD) ด้วยการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเช่นกัน จำนวนน้อยที่สุดของโดเมนสม่ำเสมอสำหรับปัญหาของของแข็งใน 2 มิติ ซึ่งแนะนำโดย [18] มีค่าเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมดของปัญหา การแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอนี้ สามารถทำได้โดยทำการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างกึ่งกลางด้านทั้งสองที่อยู่ตรงข้ามกันดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงการแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอจากเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม
(a) 1 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ (b) 4 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ (c) 8 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ

เนื่องจากการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของด้านที่อยู่บนโดเมนสม่ำเสมอนี้ใช้การประมาณเป็นแบบเชิงเส้น เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (สมการที่ 18)

สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) ของเกาส์ ณ จุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียวโดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของมัน ในทางปฏิบัติ นิยมใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับการหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าว ในรูปที่ 2.3 วงกลมทึบ 1-2-3-4 แสดงตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์หลักทรงเหลี่ยมสี่หน้า วงกลม 5-6-7-8-9 แสดงตำแหน่งของจุดต่อของโดเมนย่อยสม่ำเสมอสี่โดเมน วงกลมกากบาท g1-g12 แสดงตำแหน่งของจุดเกาส์ทั้งหมด



รูปที่ 2.3 ตำแหน่งของจุดเกาส์ ณ กึ่งกลางด้านของโดเมนสม่ำเสมอย่อย

2.4 สมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

จากหลักการของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่กล่าวมาเบื้องต้น สามารถเขียนเป็นสมการสุดท้ายได้ว่า

$$\bar{K}^{SFEM}\bar{u} = \bar{F} \tag{21}$$

โดยใช้สัญลักษณ์บาร์ด้านบนเพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกับสมการไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง เพราะฉะนั้น สติฟเนสเมทริกซ์สม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของสติฟเนสสม่ำเสมอย่อยได้เป็น

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum \bar{B}^{T} D \bar{B} A_k^s \tag{22}$$

ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการที่ 21 เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งปลายจุดต่อที่ต้องการได้

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขอบเขตความสม่ำเสมอซึ่งถูกสร้างบนพื้นฐานของเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้าน (polygonal elements) นั้นถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย [6] โดยทางทฤษฎีแล้ว เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านนี้ สามารถเป็นได้ทั้งเอลิเมนต์ที่มีด้านยื่นเข้าไปหรือยื่นออกจากเอลิเมนต์ คุณสมบัติที่สำคัญของวิธี SFEM นั้นมีอยู่หลายอย่าง [20] หาก SFEM ถูกใช้โดยมีเพียงหนึ่งเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอสำหรับแต่

ละเอลเมนต์ในขอบเขตของปัญหานั้น ผลเฉลยที่ได้ จะใกล้เคียงหรือเท่ากันกับ FEM ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่ด้านด้วย reduced integration Gauss’s rule

สำหรับการใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเพื่อสร้างโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอนั้น จำนวนของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอนั้นจะต้องไม่น้อยกว่าจำนวนน้อยที่ยอมให้ดังแสดงในตารางที่ 2.1 [18] เมื่อ $\mathbf{n_t}$ คือจำนวนของโหนดทั้งหมดของโดเมน

ตารางที่ 2.1 แสดงจำนวนน้อยที่สุดของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอสำหรับปัญหาของแข็ง

Dimension of the Problem	Minimum Number of Smoothing Domains
1D	$N_s^{min} = n_t$
2D	$N_s^{min} = \frac{2n_t}{3}$
3D	$N_s^{min} = \frac{3n_t}{6} = \frac{n_t}{2}$

เนื่องจากไม่มีการ mapping ระหว่าง physical coordinates กับ natural coordinates วิธี CS-FEM โอกาสที่จะเกิดปัญหาเรื่องการบิดตัวหรือเกิดการเสียรูปอย่างมากของเอลิเมนต์ จึงมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อยกว่าในวิธี FEM ปกติ [21,22]

นอกจากนี้ [23] ยังพบอีกว่าถ้าแต่ละเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) ของขอบเขตปัญหาที่สนใจถูกแบ่งย่อยออกเป็นโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอที่ใช้เอลิเมนต์แบบรูปทรงเหลี่ยมสีหน้าด้วยแล้ว ค่าของสติฟเนสเมทริกซ์หลักที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธี CS-FEM นี้ จะลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันกับสติฟเนสเมทริกซ์หลักของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้ Gauss integration แบบ 2X2 นั่นเอง

การแก้ปัญหาเกี่ยวกับเรื่อง Volumetric locking ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อค่าของอัตราส่วนปัวซองของวัสดุมีค่าเข้าใกล้ 0.5 สำหรับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น ทำได้โดยการกำหนดค่าที่แตกต่างกันของ Gauss quadrature สำหรับวัสดุที่แตกต่างกัน [20] ในขณะที่วิธี CS-FEM สามารถทำได้ง่ายกว่านั้นมาก โดยเพียงแต่ใช้จำนวนของโดเมนต่อเนื่องสม่ำเสมอที่แตกต่างกันสำหรับแต่ละส่วนของวัสดุที่ต่างกันนั่นเอง

วิธี SFEM ยังได้มีการศึกษาเพิ่มเติมในส่วนของทฤษฎีอย่างมากมาย [24] รวมไปถึงการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาด้านไดนามิกส์ [18] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นและแผ่นเปลือกบาง [22,25] รวมไปถึงนำไปใช้ควบคู่กันกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบขยาย (XFEM: eXtended Finite Element Method) สำหรับแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์การแตกหักใน 2 มิติ และในปัญหาแผ่น

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

บทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้สำหรับการทำวิจัย การกำหนดปัญหาตัวอย่างเพื่อดำเนินการวิจัย และกระบวนการแก้ปัญหางานวิจัย ตามลำดับ

3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

รูปที่ 3.1 แผนงานวิจัย

การศึกษาวิจัยมีขั้นตอนดำเนินการตามแผนงานวิจัย ดังรูปที่ 3.1 มีรายละเอียด คือ

1) ศึกษาทฤษฎี Finite Element Method และ Smooth Finite Element Method โดยมุ่งเน้นไปที่การศึกษาทำความเข้าใจระเบียบวิธี Cell Base Smooth Finite Element Method และการสร้าง smoothing domain ที่มีการแบ่ง Element รูปทรงสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วน

2) กำหนดปัญหาของตัวอย่าง สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ สำหรับงานวิจัย

3) สร้างสมมุติฐานของงานวิจัยและวิธีการแก้ไขปัญหาเพื่อหาคำตอบงานวิจัย

4) ศึกษาขั้นตอน วิธีการ และเครื่องมือที่ใช้สำหรับทำการวิเคราะห์ CS-FEM

5) ใช้หลักทฤษฎีการวิเคราะห์ FEM และ CS-FEM มาประยุกต์และสร้างอัลกอลิทึ่มด้วยโปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา

6) ทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากโปรแกรม MATLAB กับผลการคำนวณทางทฤษฎี (Exact Solution)

3.2 เครื่องมือและอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบ

1) โปรแกรม MATLAB

MATLAB เป็นภาษาคอมพิวเตอร์ระดับสูงที่ใช้สำหรับคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Computing) แสดงผลกราฟฟิก และเขียนโปรแกรม ทำให้เราสามารถคำนวณผลลัพธ์ พัฒนาอัลกลิทึ่ม สร้างแบบจำลอง และโปรแกรมได้ง่ายและรวดเร็วมาก ภายในตัว MATLAB ประกอบด้วยภาษาคอมพิวเตอร์ ชุดเครื่องมือ (Toolbox) กลุ่มฟังก์ชันสำเร็จรูปในแต่ละสาขาวิชา และฟังก์ชันพื้นฐานจำนวนมาก ทำให้การวิเคราะห์ทำได้หลากหลายวิธี พร้อมกับหาคำตอบที่รวดเร็ว

MATLAB สามารถทำงานได้ทั้งในลักษณะของการติดต่อโดยตรง คือการเขียนคำสั่งเข้าไปทีละคำสั่ง เพื่อให้ MATLAB ประมวลผลไปเรื่อยๆ หรือสามารถที่จะรวบรวม ชุดคำสั่งเรานั้นเป็นโปรแกรมก็ได้ ข้อสำคัญอย่างหนึ่งของ MATLAB ก็คือข้อมูลทุกตัวจะถูกเก็บใน ลักษณะของแถวลำดับ คือ ในแต่ละตัวแปรจะได้รับการแบ่งเป็นส่วนย่อยเล็ก ๆ ขึ้น ซึ่งการใช้ตัวแปรเป็นแถวลำดับ ใน MATLAB เราไม่จำเป็นที่จะต้องจองมิติเหมือนกับการเขียนโปรแกรมในภาษาขั้นต่ำทั่วไป ซึ่งทำให้เราสามารถที่จะแก้ปัญหาของตัวแปรที่อยู่ในลักษณะของเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้โดยง่าย ซึ่งทำให้เราลดเวลาการทำงานลงได้อย่างมากเมื่อเทียบกับการเขียน โปรแกรมโดยภาษาซีหรือภาษาฟอร์แทรน

2) ชุดคอมพิวเตอร์

คอมพิวเตอร์สำหรับประมวลผล ติดตั้งระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows 7 หรือเวอร์ชันสูงกว่า แบบ 64 bit ขึ้นไปคุณสมบัติอย่างน้อยดังนี้

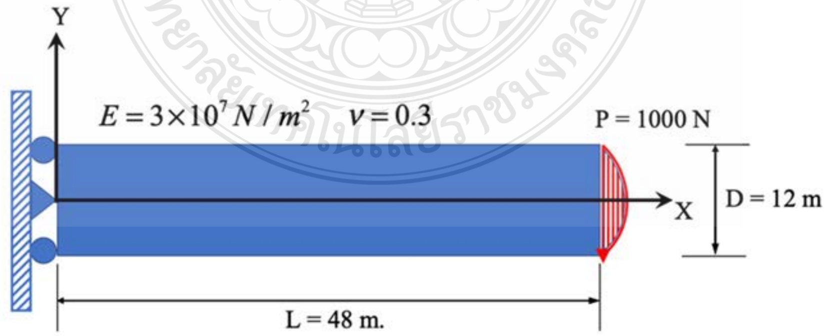
- CPU แบบ x86-64 processor 4 cores ขึ้นไป
- RAM 4 GB ขึ้นไป
- พื้นที่ว่างบน Harddisk อย่างน้อย 2 GB ขึ้นไป สำหรับการติดตั้งเฉพาะ MATLAB และ 4-6 GB สำหรับติดตั้ง Toolboxes ของโปรแกรม

รูปที่ 3.2 ชุดคอมพิวเตอร์

3.3 ปัญหาสำหรับงานวิจัย

3.3.1 การเปรียบเทียบผลเชิงตัวเลข (Numerical Benchmark)

การศึกษาวิจัยนี้ ดำเนินการศึกษาโดยทำการปรับปรุงโปรแกรมที่ถูกเขียนขึ้นด้วย MATLAB สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติโดย Liu G. และคณะ [5] ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์โดเมนย่อยสม่ำเสมอที่ใช้เป็นแบบความยาวด้านไม่คงที่แปรเปลี่ยนเป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของด้านนั้น ๆ ปัญหาที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของอัลกอรีทึมและผลการวิเคราะห์เป็นตัวอย่างคานยื่นปลายที่มีความยาว 48 เมตร ความลึก 12 เมตร และความหนา 1 เมตรเพื่อให้เป็นปัญหาความเค้นในระนาบแบบสองมิติ ปลายคานด้านหนึ่งมีแรงกระทำแบบไม่สม่ำเสมอเป็นรูปพาราโบลา ที่ด้านปลายยื่นด้านขวามือเท่ากับ 1000 นิวตัน ปลายคานด้านซ้ายมือมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (HINGE SUPPORT) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึกโดยที่ขอบด้านบนและด้านล่างมีสภาพเป็นฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวดิ่ง (ROLLER SUPPORT) ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 คานยื่นปลายสำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

ผลเฉลยแม่นตรงของคานยื่นปลายดังกล่าวซึ่งได้แก่ การเคลื่อนที่ทั้งสองแกน สามารถแสดงในรูปสมการได้เป็น [19]

$$u_x(x,y)=\frac{Py}{6EI}\left[(6L-3x)x+(2+\nu)(y^2-\frac{D^2}{4})\right] \tag{23}$$

$$u_y(x,y)=-\frac{P}{6EI}\left[3\nu y^2(L-x)+(4+5\nu)\frac{xD^2}{4}+(3L-x)x^2\right] \tag{24}$$

เมื่อ $I=D^3/12$ คือโมเมนต์ความเฉื่อยของคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเท่ากับหนึ่งหน่วย ความเค้นในระนาบที่คำนวณได้จากค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 25

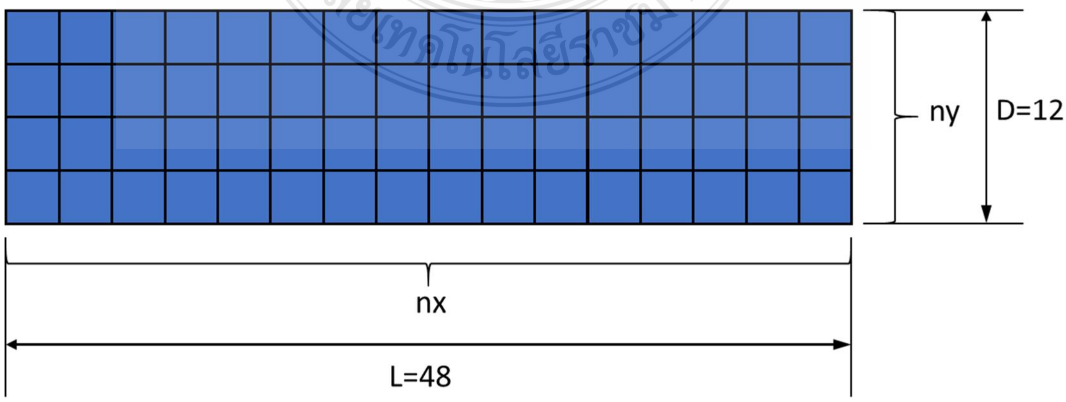
$$\sigma_{xx}(x,y)=\frac{Py}{I}(L-x),\ \sigma_{yy}(x,y)=0,\ \sigma_{xy}(x,y)=-\frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4}-y^2) \tag{25}$$

3.3.2 การกำหนดจำนวนโครงข่ายเอลิเมนต์

การศึกษาการวิจัยนี้กำหนดให้ทำการทดสอบและเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ โดยใช้การแบ่งโครงตาข่ายเอลิเมนต์ จำนวน 5 ชุด คือขนาดของโครงตาข่ายจากหยาบสุดซึ่งมีขนาด 16x4 , 24x6 ไปจนถึง 48x12 ดังแสดงในตารางที่ 3.1 โดยกำหนดจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ด้านแกน X และแกน Y $(nx : ny)$ เท่ากับ 4:1 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับความยาวต่อความลึกของคาน (L:D) ทำให้ได้เอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีความสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 3.4

ตารางที่ 3.1 แสดงจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์สำหรับปัญหาตัวอย่าง

แกน	จำนวนโครงข่ายเอลิเมนต์				
nx	16	24	32	40	48
ny	4	6	8	10	12

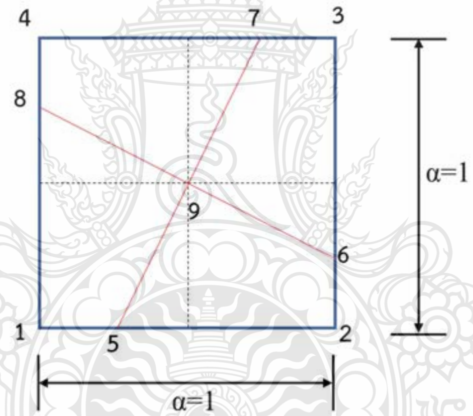


รูปที่ 3.4 แสดงการแบ่งโครงข่ายเอลิเมนต์อัตราส่วน 4:1

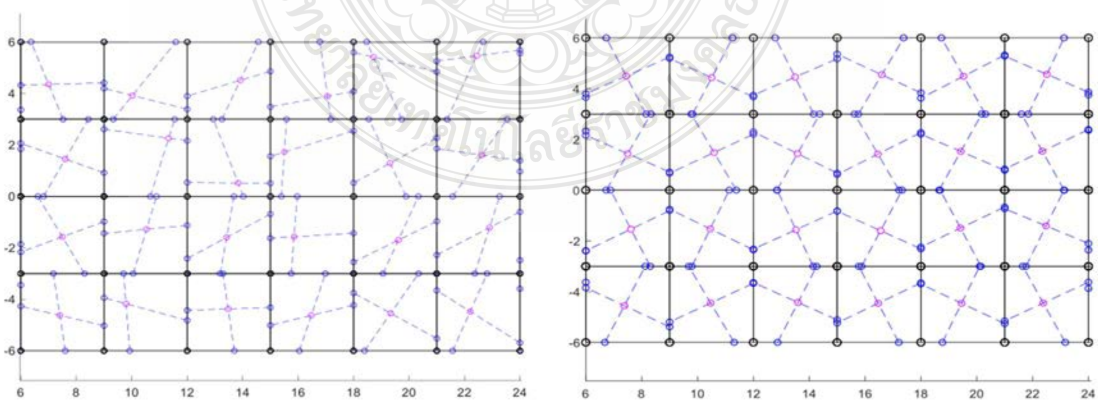
3.3.3 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย

การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยในแต่ละเอเมนต์นั้น เริ่มต้นโดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสี่ด้าน คือ ตำแหน่งที่ 5 บนด้าน 1-2 ตำแหน่งที่ 6 บนด้าน 2-3 ตำแหน่งที่ 7 บนด้าน 3-4 และตำแหน่งที่ 8 บนด้าน 4-1 ทำการลากเส้นเชื่อมจากตำแหน่งที่ทำการสุ่มไปยังด้านตรงข้าม ได้เส้นตรง 5-7 และ 6-8 ตัดกันที่ตำแหน่งที่ 9 ทำให้สามารถแบ่งแต่ละเอลิเมนต์ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 4 โดเมนดังรูปที่ 3.5

จากรูปดังกล่าวพบว่า การสร้างโดเมนแบบอิสระด้วยหลักการสุ่มในทุกๆเอลิเมนต์แบบนี้ ลักษณะรูปร่างของโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domain) ที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีขนาดและรูปร่างแตกต่างกันอย่างไม่มีรูปแบบใดๆ ซึ่งสังเกตเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อเชื่อมต่อเอลิเมนต์ทุกเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน พื้นที่ที่เกี่ยวข้องกับจุดต่อของเอลิเมนต์หลักจะมีความแปรผันมาก ทำให้ผลของการคำนวณมีค่าที่ไม่แน่นอน ควบคุมไม่ได้และมีโอกาสผิดพลาดสูงดังแสดงในรูปที่ 3.6 (1)



รูปที่ 3.5 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย



(1) (2)

รูปที่ 3.6 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย (1) แบบอิสระ (2) แบบ Semi-Unit Cell

เพื่อขจัดความไม่แน่นอนดังกล่าวออกไปจากการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย หลักการของ Unit Cell จะถูกนำมาประยุกต์ใช้ โดยพยายามสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยในลักษณะที่ทำให้การกระจายตัวของมันมีความสม่ำเสมอต่อเนื่องกันไปทั่วทั้งโดเมนของปัญหาที่กำลังสนใจ โดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสี่ด้าน (จุดที่ 5 , 6 , 7 และ8) ให้สอดคล้องกับอัตราส่วน α ที่กำหนดไว้ $(\alpha_x = \alpha_y)$ โดยกำหนดให้อัตราส่วน α มีค่า 3 ช่วง คือ 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ ทำการลากเส้นเชื่อมจากตำแหน่งที่ทำการสุ่มไปยังด้านตรงข้ามได้เส้นตรง 5-7 และ 6-8 ทำให้สามารถแบ่งเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 4 โดเมนดังรูปที่ 3.5 จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ของด้านที่ใช้ขอบเอลิเมนต์ร่วมกันสร้างโดเมนสม่ำเสมอที่มีลักษณะแบบเงาสะท้อนกับเอลิเมนต์ที่อยู่ต่อเนื่องกัน ทำให้พื้นที่ที่เกี่ยวข้องกับจุดต่อของเอลิเมนต์มีขนาดที่ใกล้เคียงกัน การทำเช่นนี้ทำให้ได้รูปแบบของโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domain) ในลักษณะที่เรียกว่า Semi-Unit Cell ดังแสดงในรูปที่ 3.6 (2)

3.4 กระบวนการคำนวณปัญหาสำหรับงานวิจัย

การวิเคราะห์ศึกษาปัญหาตัวอย่างในงานวิจัยนี้ ได้ใช้โปรแกรม MATLAB สร้างอัลกอลิทึ่มจากหลักทฤษฎี CS-FEM เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่าง ในการศึกษากำหนดให้แบ่งโครงข่ายเอลิเมนต์เพื่อทำการทดสอบจำนวน 5 ชุดโครงข่าย (mesh) คือ 16x4 , 24x6 , 32x8 , 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ ในแต่ละโครงข่ายจะทำการวิเคราะห์โดยสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย (smoothing domain) 3 อัตราส่วน α ได้แก่ 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ แสดงขั้นการคำนวณของโปรแกรม ดังรูปที่ 3.7 มีรายละเอียดดั้งนี้

1. สร้างแบบจำลอง
   1) สร้างแบบจำลองเลขาคณิตของคานปลายยื่น (Geometric construction) โดยการกำหนดความยาว L= 48 เมตร และ D=12 เมตร
   2) กำหนดคุณสมบัติทางวัสดุ (Material properties) โดยกำหนด E = 3.0×10^6 นิวตันต่อตารางเมตร , ν = 0.3
2. สร้างโครงข่ายเอลิเมนต์ (Discretization/mesh the model)
   กำหนดจำนวนการสร้างโครงตาข่ายเอลิเมนต์ เพื่อแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ ตามที่กล่าวในหัวข้อที่ 3.3.2
3. สร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยตามอัตราส่วน α
   สร้างโดเมนสม่ำเสมอ (smoothing domain) ให้กับแต่ละเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 2 เพื่อทำการแบ่งภายในทุกเอลิเมนต์ออกเป็น 4 ส่วนโดยอาศัยหลักการตามที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ 3.3.3
4. คำนวณหาค่า shape function และสร้าง element stiffness matrix
   โปรแกรมจะประมวลผลจากค่าที่ได้กำหนดในขั้นตอนที่ 1-4 เพื่อคำนวณหาค่าต่างๆ ดังนี้
      1) คำนวณหาจำนวนจุดต่อทุก Node
      2) คำนวณจำนวนเอเอลิเมนต์ทั้งหมด
      3) คำนวณจำนวนตัวแปรอิสระที่จุดต่อทั้งหมด (ndof)

4) คำนวณค่าพิกัดของจุดต่อทั้งหมด

5) คำนวณหา shape function ของเอลิเมนต์

6) คำนวณหาค่า stiffness matrix ของแต่ละเอลิเมนต์ย่อย [Ke]

5. สร้าง global stiffness matrix [K]

   โปรแกรมจะประมวลผลและรวมค่า stiffness matrix [Ke] ของแต่ละเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 4 มาสร้างเป็น global stiffness matrix [K] ของปัญหาตัวอย่างทั้งระบบ

6. กำหนดเงื่อนไขจุดรองรับและน้ำหนักบรรทุก

   1) กำหนดเงื่อนไขจุดรองรับแบบ Hinge Support และ Roller Support ที่ปลายด้านซ้ายมือให้กับแบบจำลอง

   2) ใส่ค่าน้ำหนักกระทำที่ปลายคานอิสระ (loadings) โดยกำหนดให้ P=1,000

7. คำนวณหาค่าการเคลื่อนตัว u จากสมการ $Ku = f$

   โปรแกรมจะทำการประมวลผลโดยใช้ผลการคำนวณค่า Global stiffness matrix (K) ที่ได้จากขั้นตอนที่ 5 ขอบเขตเงื่อนไขจุดรองรับและน้ำหนักกระทำที่ปลายคานที่ได้กำหนดในขั้นตอนที่ 6 มาประยุกต์ในรูปสมการ $[F] = [K][U]$ ได้ผลการคำนวณแสดงในรูปแบบการเคลื่อนตัวที่ที่จุดต่อต่างๆ (Displacement , u)

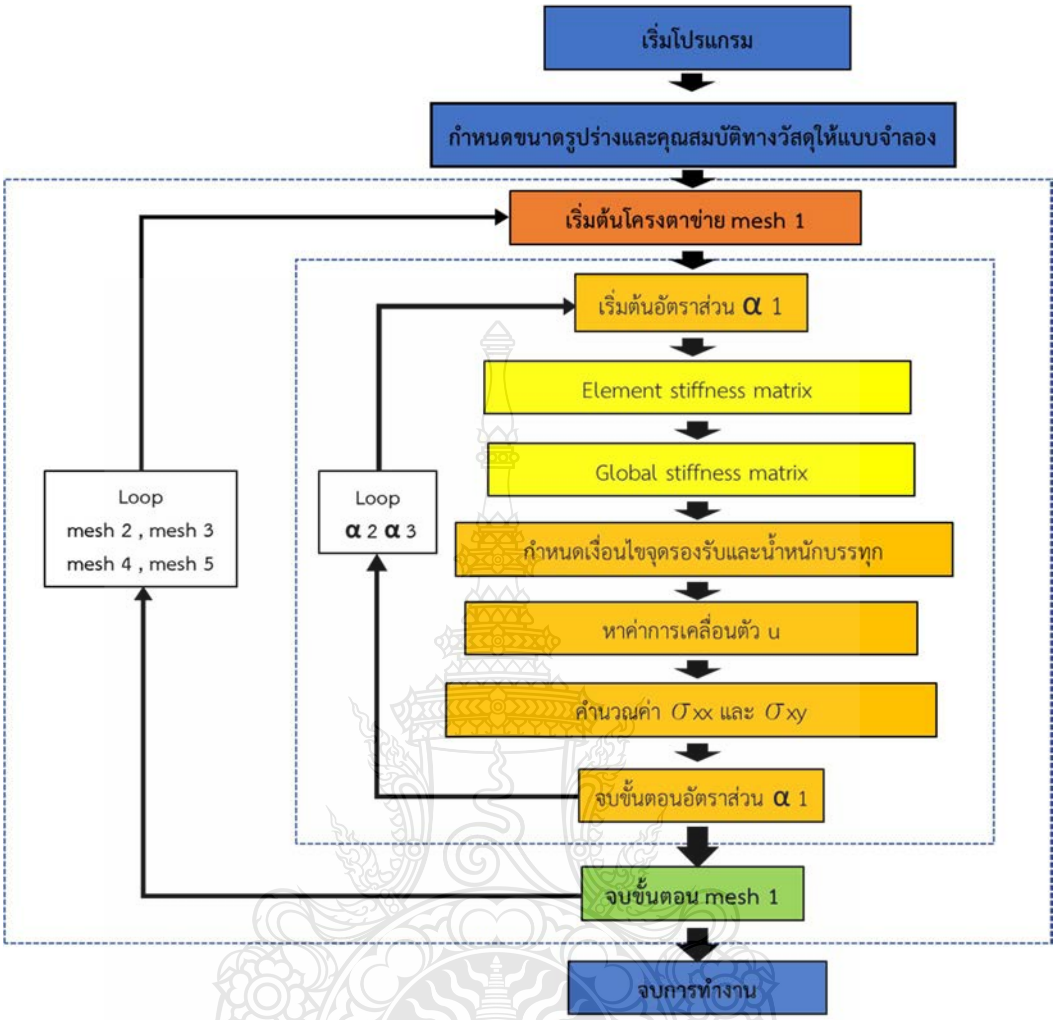
8. คำนวณหาค่า normal stress และ shear stress

   1) ใช้ค่า Displacement ที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 7 คำนวณหา normal stress (σ_{xx})

   2) ใช้ค่า Displacement ที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 7 shear stress (σ_{xy})

9. เปรียบผลการวิเคราะห์กับผลการคำนวณทางทฤษฎี

   ใช้สมการที่ 23 ถึง 25 คำนวณหาค่า Tip Displacement , normal stress และ shear stress ของผลลัพธ์ทางทฤษฎี เปรียบเทียบผลการศึกษาในรูปแบบกราฟฟิกและตาราง



รูปที่ 3.7 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมวิเคราะห์ปัญหา

บทที่ 4
ผลการศึกษางานวิจัย

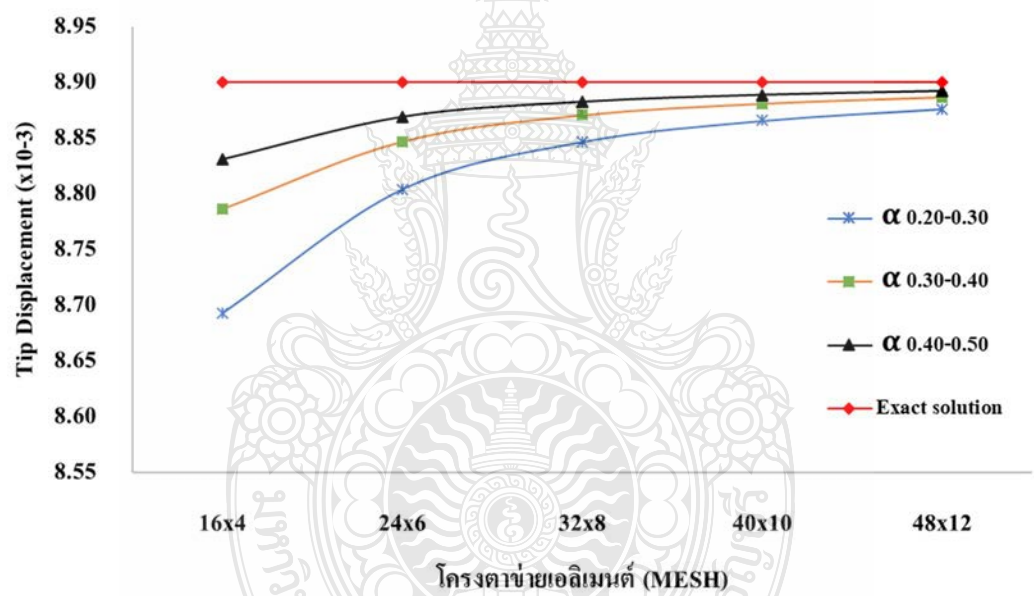
ในเนื้อหาบทที่ 4 ส่วนนี้จะกล่าวถึงผลของการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ โดยใช้ปัญหาคานยื่นปลายเป็นตัวอย่างในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ สำหรับคำนวณค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) และความเค้นเฉือน (Shear stress) เพื่อเปรียบเทียบค่าจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) แบบการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 4 ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้ากับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ในส่วนของการวิเคราะห์ค่าความเค้นนั้น จะทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลการคำนวณจำนวน 2 หน้าตัด คือ หน้าตัดที่ระยะ L/2 และ L/4 จากจุดรองรับ เมื่อ L คือความยาวทั้งหมดของคานยื่นปลาย โดยมีการแบ่งขนาดโครงข่ายเอลิเมนต์ (Mesh) จำนวน 5 ชุด คือ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ ในแต่ละชุดโครงข่ายเอลิเมนต์ ทำการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain) แบบแบ่งเป็น 4 ส่วน ตามอัตราส่วน α เมื่อ α คือ อัตราส่วนความยาวของเอลิเมนต์ย่อยต่อความยาวของเอลิเมนต์หลักที่เท่ากันทั้งสองแกน ($\alpha_x = \alpha_y$) กำหนดให้มีค่า 3 ช่วง คือ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ ผลการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

4.1 การเคลื่อนตัวของปลายคาน (Displacement of Beam)

ผลการวิเคราะห์ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายสุด (Tip Displacement) ของคานปัญหาตัวอย่างโดยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) แบบการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 4 ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า แสดงไว้ในตารางที่ 4.1 จะพบว่าค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact Solution) มีค่าเท่ากับ 8.900×10^{-3} m ในขณะที่ผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) ได้คำตอบที่แปรผันตาม อัตราส่วนของ α และจำนวนของการแบ่งเอลิเมนต์ กล่าวคือ ผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) ลู่เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) เมื่ออัตราส่วนของ α เพิ่มขึ้น ขณะที่จำนวนการแบ่งโครงตาข่ายเอลิเมนต์ที่มากขึ้นทำให้ผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) มากขึ้นเช่นเดียวกัน

ตารางที่ 4.1 การเคลื่อนที่ปลายคาน Tip Displacement (x10^{-3} m)

α	โครงตาข่ายเอลิเมนต์ (MESH)				
	16x4	24x6	32x8	40x10	48x12
0.20-0.30	8.693	8.804	8.847	8.866	8.876
0.30-0.40	8.787	8.847	8.871	8.881	8.887
0.40-0.50	8.831	8.869	8.882	8.889	8.892
Exact Solution	8.900	8.900	8.900	8.900	8.900



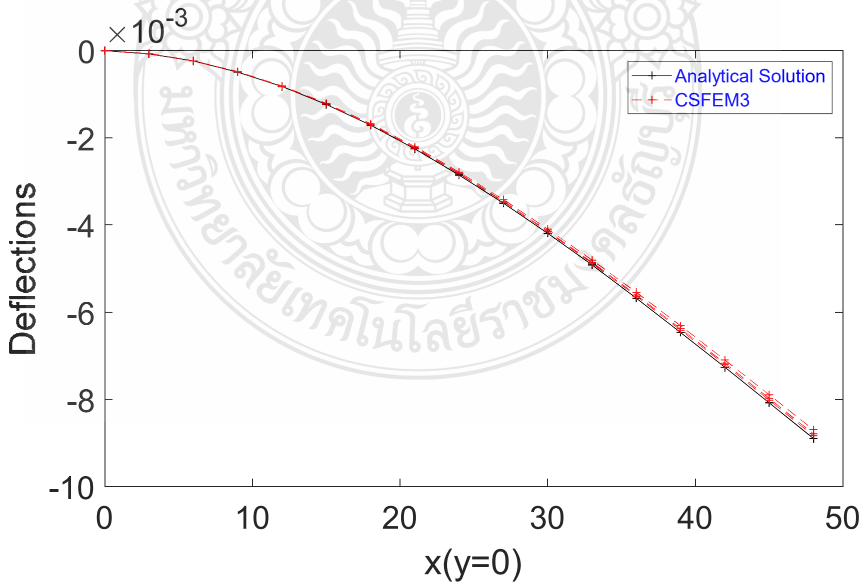
รูปที่ 4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานเทียบกับค่าทางทฤษฎี

รูปที่ 4.1 แสดงผลของการเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายสุด (Tip Displacement) ของคานปัญหาตัวอย่างที่ได้จากตารางที่ 4.1 เทียบกับค่าทางทฤษฎี สามารถเปรียบเทียบหาความแตกต่างระหว่างผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) กับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ในรูปแบบร้อยละ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 4.2 เมื่อพิจารณาค่าร้อยละของความแตกต่างจากจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่มีความหยาบมากสุดคือขนาด 16x4 พบว่าที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 นั้นผลการคำนวณมีค่าแตกต่างจากค่าทางทฤษฎีเท่ากับร้อยละ 2.32 ในขณะที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ผลการคำนวณค่าการเคลื่อนที่จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) มีค่า

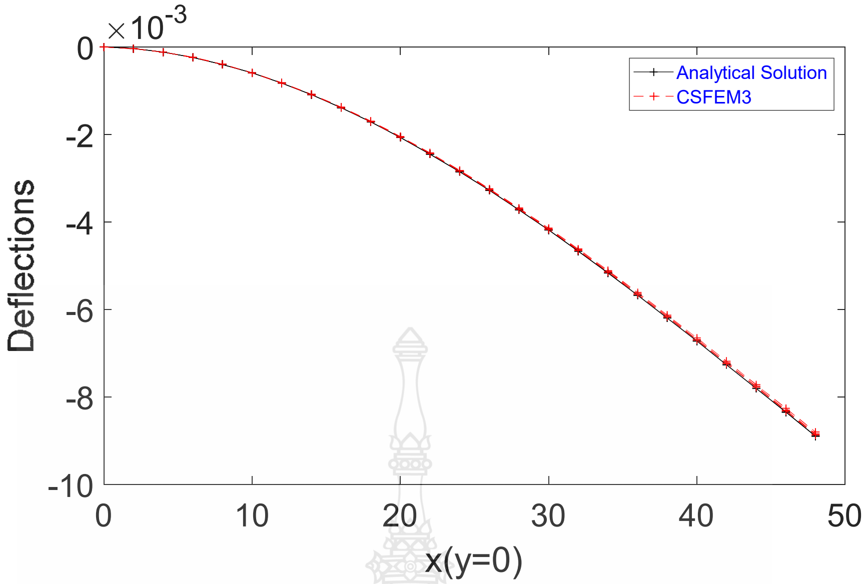
แตกต่างจากค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ลดลงเป็นร้อยละ 1.27 และ 0.78 ตามลำดับ ในขณะที่เมื่อมีการเพิ่มจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นเป็น 48x12 จะมีค่าความแตกต่างจากค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) เท่ากับร้อยละ 0.27, 0.15 และ 0.09 ที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่าค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) จะลู่เข้าสู่ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) มากขึ้น เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของทั้งอัตราส่วน α และจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานจากการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เมื่อนำมาวาดกราฟเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) แสดงได้ดังรูปที่ 4.2 ถึง 4.6

ตารางที่ 4.2 ค่าร้อยละของความแตกต่าง Tip Displacement ระหว่าง CS-FEM กับค่า EXACT

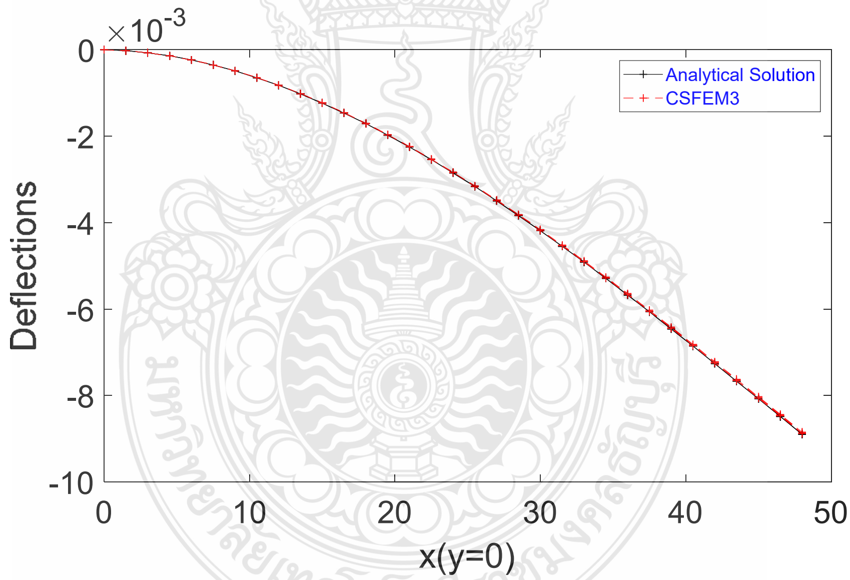
α	**โครงตาข่ายเอลิเมนต์ (MESH)**				
	16x4	24x6	32x8	40x10	48x12
0.20-0.30	2.32	1.07	0.60	0.38	0.27
0.30-0.40	1.27	0.59	0.33	0.21	0.15
0.40-0.50	0.78	0.35	0.20	0.13	0.09



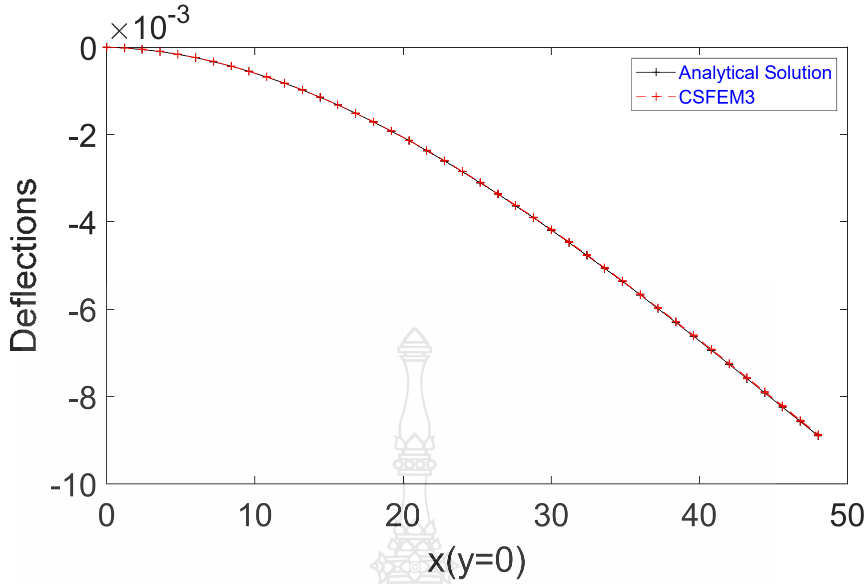
รูปที่ 4.2 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (mesh 16x4 - α1,α2,α3)



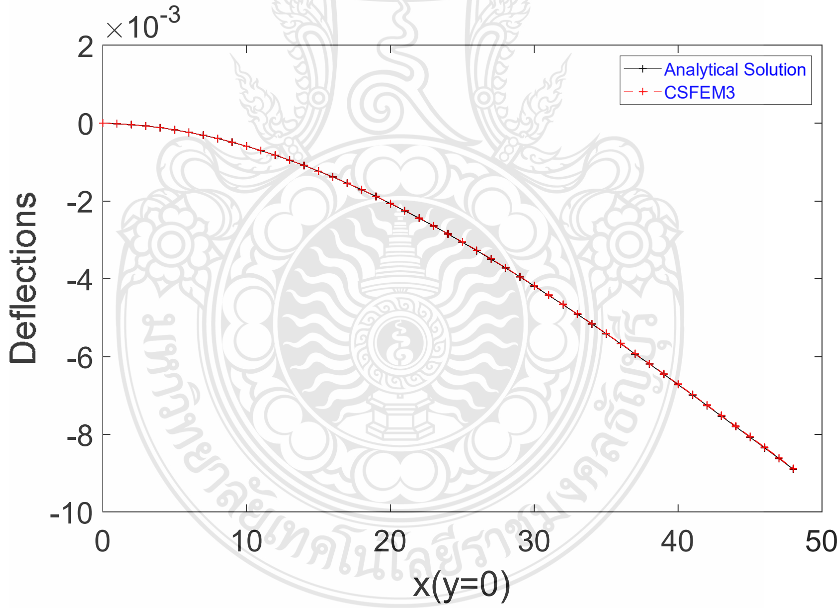
รูปที่ 4.3 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (mesh 24x6 - α1, α2, α3)



รูปที่ 4.4 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (mesh 32x8 - α1, α2, α3)



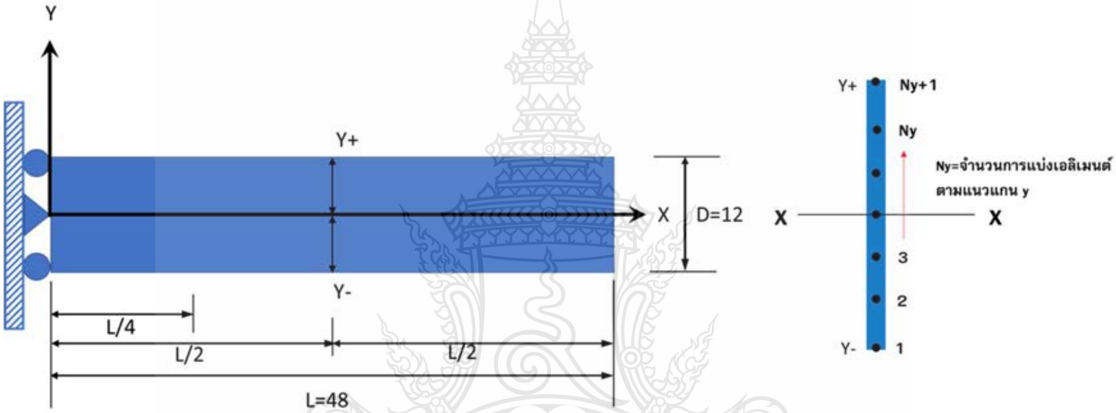
รูปที่ 4.5 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (mesh 40x10 - α1, α2, α3)



รูปที่ 4.6 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (mesh 48x12 - α1, α2, α3)

4.2 ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stresses)

การวิเคราะห์เพื่อศึกษาค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ของคานปัญหาตัวอย่างนั้น เนื่องจาก $\sigma_{yy}(x,y)=0$ จึงใช้เพียงค่าของ $\sigma_{xx}(x,y)$ สำหรับทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) กับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของคานตัวอย่าง ซึ่งจะทำการวิเคราะห์ผลการคำนวณจำนวน 2 หน้าตัด คือ หน้าตัดที่ระยะ L/2 และหน้าตัดที่ระยะ L/4 จากจุดรองรับ เมื่อ L คือ ความยาวของคานปัญหาตัวอย่าง โดยใช้ค่าความเค้นตั้งฉากทุกค่าประจำตำแหน่งจุดต่อ (node) บนหน้าตัดที่คำนวณได้จากผิวบนสุด (+Y) ถึงผิวล่างสุด (-Y) ดังรูปที่ 4.7 การแบ่งจำนวนโครงตาข่ายเอลิเมนต์และค่าอัตราส่วน α ในการสร้างโดเมนสม่ำเสมอนั้นยังคงใช้ในลักษณะเดียวกันกับการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของปลายคาน (Displacement of Beam) ดังที่กล่าวในหัวข้อ 4.1



รูปที่ 4.7 ตำแหน่งที่ทำการวิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉาก

4.2.1 ผลการวิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal stress , σ_{xx}) ของคานปัญหาตัวอย่างโดยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) แบบการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 4 ส่วน ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้ากับค่าที่ได้จากผลลัพธ์ทางทฤษฎี (Exact solution) ที่ตำแหน่งหน้าตัดคานระยะ L/2 จากจุดรองรับ แสดงไว้ในตารางที่ 4.3 ถึง 4.7 และแสดงลักษณะการกระจายค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal stress , σ_{xx}) ดังรูปที่ 4.8 ถึง 4.12

ตารางที่ 4.3 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 16x4 (ระยะ L/2)

α	Mesh 16x4				
	node				
	1	2	3	4	5
0.2-0.3	-800.63	-488.30	14.81	494.49	809.24
0.3-0.4	-831.51	-486.43	3.43	491.61	825.44
0.4-0.5	-872.25	-497.31	2.57	498.13	868.55
Exact	-1000.00	-500.00	0.00	500.00	1000.00

ตารางที่ 4.4 ค่า σ_{xx}สำหรับโครงตาข่ายขนาด 24x6 (ระยะ L/2)

α	Mesh 24x6						
	node						
	1	2	3	4	5	6	7
0.2-0.3	-861.20	-660.42	-333.95	2.14	336.43	656.05	863.80
0.3-0.4	-887.21	-661.93	-328.06	2.25	338.60	664.86	895.50
0.4-0.5	-913.50	-661.36	-331.26	0.66	337.26	669.03	913.73
Exact	-1000.00	-666.67	-333.33	0.00	333.33	666.67	1000.00

ตารางที่ 4.5 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 32x8 (ระยะ L/2)

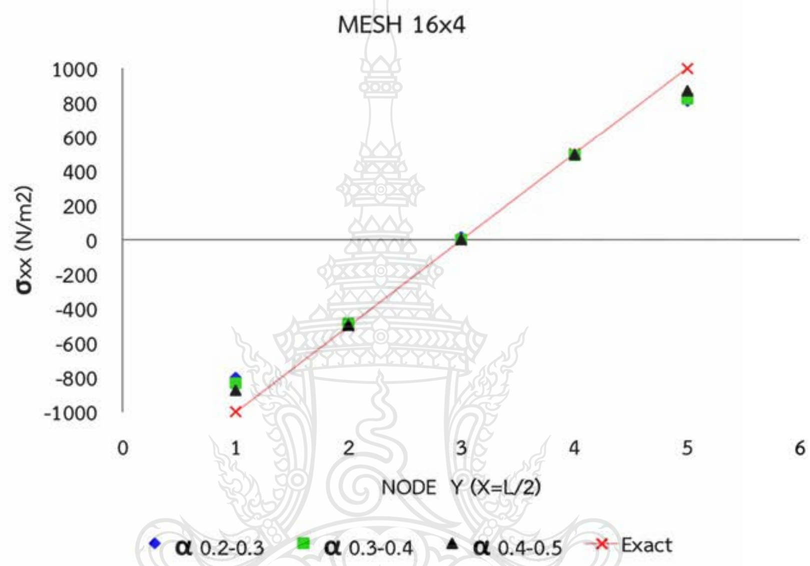
α	Mesh 32x8								
	node								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-904.71	-742.85	-493.96	-247.71	-4.04	247.49	497.99	744.32	899.76
0.3-0.4	-921.39	-747.83	-503.68	-249.95	-0.20	247.89	496.59	749.38	922.37
0.4-0.5	-932.15	-742.49	-495.30	-248.04	-0.89	248.69	499.05	745.37	934.12
Exact	-1000.00	-750.00	-500.00	-250.00	0.00	250.00	500.00	750.00	1000.00

ตารางที่ 4.6 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 40x10 (ระยะ L/2)

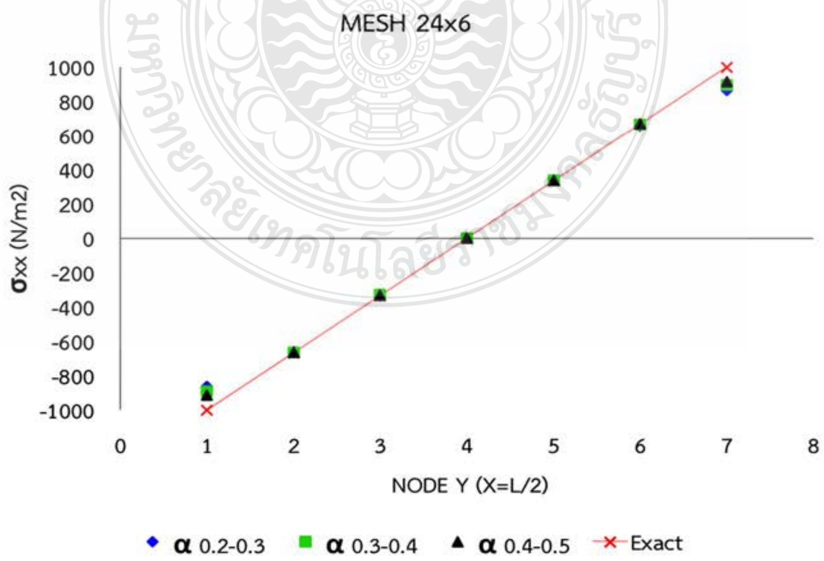
α	Mesh 40x10										
	node										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.2-0.3	-927.78	-795.50	-595.20	-400.16	-199.62	-0.12	198.27	398.62	600.99	798.93	925.70
0.3-0.4	-935.43	-798.04	-598.08	-401.36	-205.06	-2.90	197.82	398.14	600.76	797.44	931.58
0.4-0.5	-948.04	-801.16	-600.85	-398.81	-200.92	-2.75	197.26	401.59	598.85	798.36	949.52
Exact	-1000.00	-800.00	-600.00	-400.00	-200.00	0.00	200.00	400.00	600.00	800.00	1000.00

ตารางที่ 4.7 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 48x12 (ระยะ L/2)

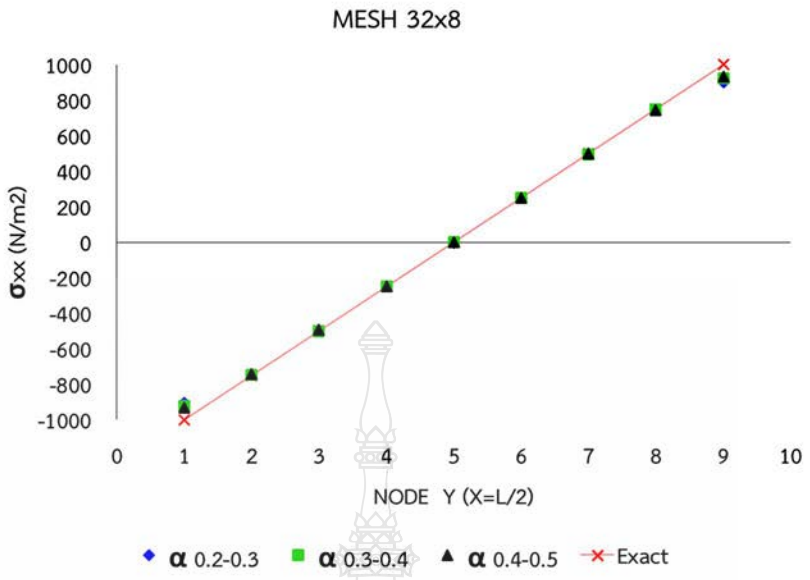
Mesh 48x12													
α	node												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-936.46	-829.62	-665.75	-497.10	-329.68	-167.17	-1.56	165.79	331.60	499.43	669.20	832.76	939.47
0.3-0.4	-946.50	-834.60	-665.51	-496.96	-332.76	-166.47	3.28	167.62	336.55	499.12	663.41	833.14	949.43
0.4-0.5	-954.53	-830.71	-670.54	-502.13	-334.26	-164.24	1.52	166.95	334.57	501.80	669.22	835.34	958.04
Exact	-1000.00	-833.33	-666.67	-500.00	-333.33	-166.67	0.00	166.67	333.33	500.00	666.67	833.33	1000.00



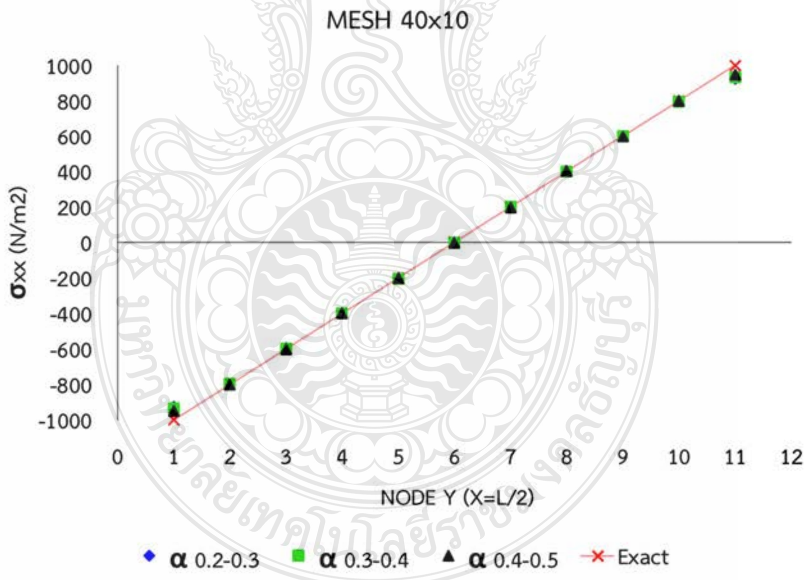
รูปที่ 4.8 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 16x4 (ระยะ L/2)



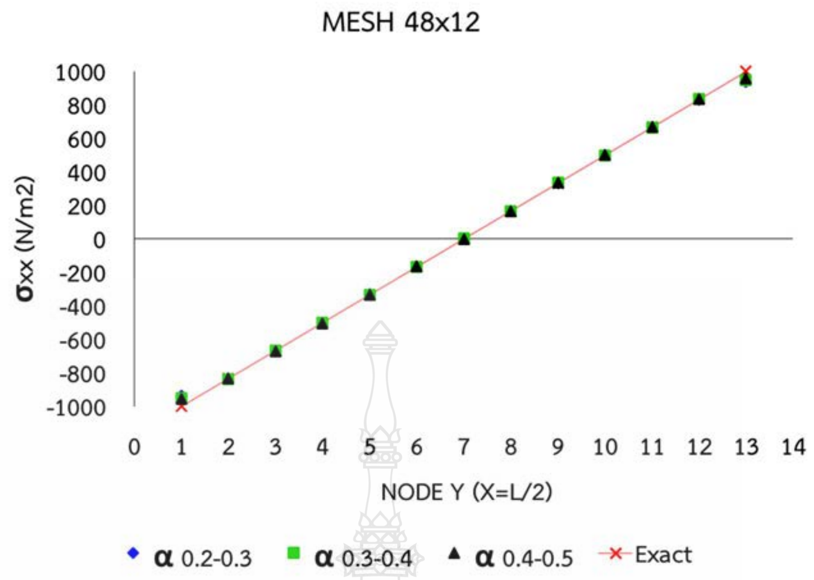
รูปที่ 4.9 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 24x6 (ระยะ L/2)



รูปที่ 4.10 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 32x8 (ระยะ L/2)



รูปที่ 4.11 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 40x10 (ระยะ L/2)



รูปที่ 4.12 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 48x12 (ระยะ L/2)

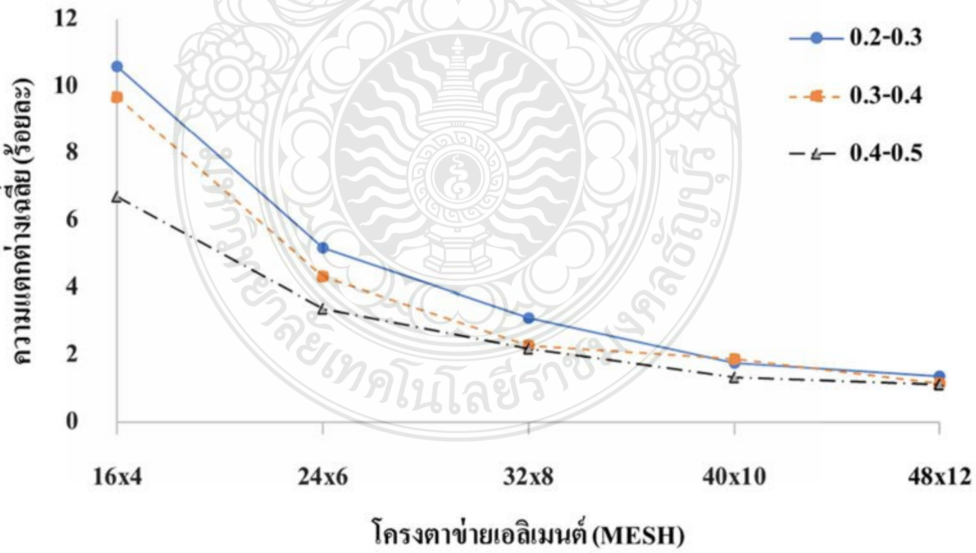
ผลการวิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) จะถูกนำมาเปรียบเทียบเหมือนกับการวิเคราะห์ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (Tip Displacement) ซึ่งพบว่าผลการเปรียบเทียบของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน มีแนวโน้มลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีเมื่อมีการเพิ่มค่าของจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์หรือค่าของอัตราส่วน α ค่าใดค่าหนึ่งหรือรวมกันทั้งสองแบบ ในกรณีความเค้นตั้งฉากของหน้าตัดคานที่ระยะ L/2 ก็เช่นเดียวกัน ค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) มีค่าลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีเมื่อมีการเพิ่มค่าของจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์หรือค่าของอัตราส่วน α ค่าใดค่าหนึ่งหรือรวมกันทั้งสองแบบ ต่างกันตรงที่ตำแหน่งของจุดต่อหรือระยะในแนวดิ่งของหน้าตัดจะมีค่าโคออร์ดิเนตไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแบ่ง

จากตารางที่ 4.3 ถึง 4.7 เพื่อความสะดวกในการอธิบายผลการวิเคราะห์จะใช้จุดต่อ 2 จุด ซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างเข้ามาตามลำดับ (รูปที่ 4.7 จุดที่ 2 และจุดที่ Ny) สำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16x4) จุดต่อ 2, 6 (โครงตาข่าย 24x6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32x8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40x10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48x12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เมื่อเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของจุดต่อต่าง ๆ เหล่านี้ ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 1.72 , 1.26 , 0.86 , 0.35 และ 0.26 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 2.20 , 0.49 , 0.19, 0.28 และ 0.06 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยมีค่าเป็นร้อยละ 0.46, 0.22, 0.81, 0.03 และ 0.04 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ แสดงได้ดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 ค่าร้อยละของความแตกต่าง σ_{xx} ระหว่าง CS-FEM กับค่า EXACT (ระยะ L/2)

ความแตกต่าง CS-FEM / EXACT (ร้อยละ)					
α	Mesh 16x4	Mesh 24x6	Mesh 32x8	Mesh 40x10	Mesh 48x12
0.2-0.3	1.72	1.26	0.86	0.35	0.26
0.3-0.4	2.20	0.49	0.19	0.28	0.06
0.4-0.5	0.46	0.22	0.81	0.03	0.04

จากตารางที่ 4.3 ถึง 4.7 เมื่อทำการหาค่าเฉลี่ยของค่าความแตกต่างของผลการวิเคราะห์จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CSFEM) เมื่อเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของทุกจุดต่อในตำแหน่งที่อยู่ถัดจากจุดกึ่งกลางกลางหน้าตัดไปทางด้านขอบบนและขอบล่าง พบว่า ที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 10.61, 5.19, 3.10, 1.78 และ 1.38 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 9.67, 4.31, 2.28, 1.87 และ 1.15 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 6.71, 3.37, 2.18, 1.35 และ 1.11 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 ค่าเฉลี่ยของความแตกต่าง σ_{xx} บนหน้าตัดคานที่ระยะ L/2

4.2.2 ผลการวิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal stress , σ_{xx}) ของคานปัญหาตัวอย่างโดยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) แบบการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวน 4 ส่วน ที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้ากับค่าที่ได้จากค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ที่ตำแหน่งหน้าตัดคานระยะ L/4 จากจุดรองรับแสดงไว้ในตารางที่ 4.9 ถึง 4.13 และแสดงลักษณะการกระจายค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal stress , σ_{xx}) ดังรูปที่ 4.14 ถึง 4.18

ตารางที่ 4.9 ค่า σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายขนาด 16x4 (ระยะ L/4)

	Mesh 16x4				
α	node				
	1	2	3	4	5
0.2-0.3	-1203.54	-726.63	-8.06	732.32	1197.75
0.3-0.4	-1243.88	-728.37	1.71	743.10	1239.29
0.4-0.5	-1300.76	-753.93	-12.64	723.95	1296.80
Exact	-1500.00	-750.00	0.00	750.00	1500.00

ตารางที่ 4.10 ค่า σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายขนาด 24x6 (ระยะ L/4)

	Mesh 24x6						
α	node						
	1	2	3	4	5	6	7
0.2-0.3	-1293.72	-981.33	-485.31	4.55	492.20	989.91	1295.34
0.3-0.4	-1329.79	-993.90	-503.32	-8.46	493.91	989.86	1333.03
0.4-0.5	-1368.86	-998.51	-495.82	5.58	493.76	993.74	1368.55
Exact	-1500.00	-1000.00	-500.00	0.00	500.00	1000.00	1500.00

ตารางที่ 4.11 ค่า σ_{xx} สำหรับโครงตาข่ายขนาด 32x8 (ระยะ L/4)

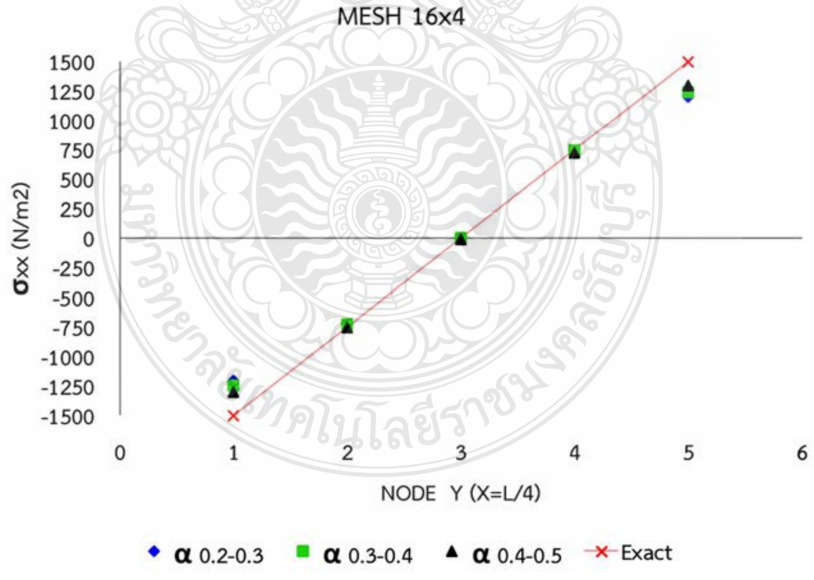
	Mesh 32x8								
α	node								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-1351.82	-1114.52	-741.33	-373.94	-8.14	371.59	741.64	1120.67	1361.66
0.3-0.4	-1378.40	-1116.52	-743.77	-372.42	4.70	375.92	733.34	1121.05	1381.33
0.4-0.5	-1401.23	-1125.24	-751.75	-377.92	7.92	379.14	755.22	1122.59	1400.86
Exact	-1500.00	-1125.00	-750.00	-375.00	0.00	375.00	750.00	1125.00	1500.00

ตารางที่ 4.12 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 40x10 (ระยะ L/4)

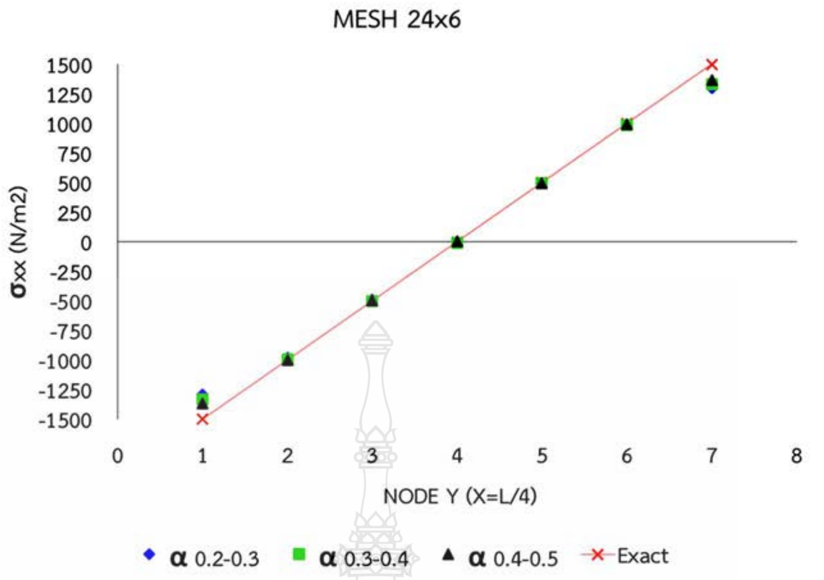
	Mesh 40x10										
α	node										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.2-0.3	-1381.82	-1198.17	-900.16	-596.40	-299.34	-2.49	299.84	600.77	899.06	1194.60	1388.95
0.3-0.4	-1406.73	-1202.75	-893.99	-599.63	-302.00	-1.98	303.43	603.39	895.07	1202.63	1413.70
0.4-0.5	-1420.48	-1198.94	-899.84	-597.32	-302.05	2.30	302.74	601.60	903.46	1201.50	1422.84
Exact	-1500.00	-1200.00	-900.00	-600.00	-300.00	0.00	300.00	600.00	900.00	1200.00	1500.00

ตารางที่ 4.13 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ สำหรับโครงตาข่ายขนาด 48x12 (ระยะ L/4)

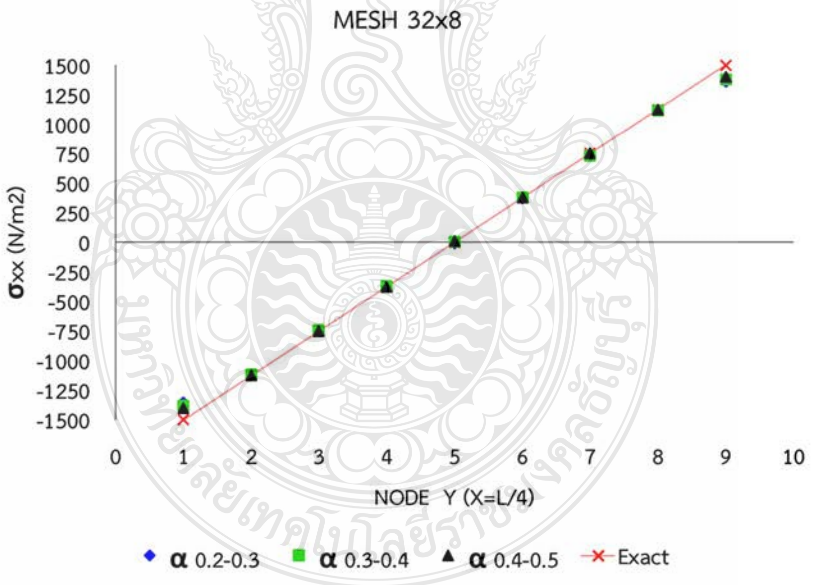
	Mesh 48x12												
α	node												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-1404.40	-1245.73	-993.93	-745.66	-499.58	-249.28	5.90	251.03	502.67	746.48	993.50	1246.98	1400.69
0.3-0.4	-1419.62	-1245.90	-994.33	-746.68	-498.40	-251.52	-0.91	248.90	497.66	747.05	1004.11	1252.82	1422.25
0.4-0.5	-1432.99	-1249.88	-998.00	-749.89	-497.49	-246.27	2.54	248.63	499.77	749.02	996.31	1248.56	1432.83
Exact	-1500.00	-1250.00	-1000.00	-750.00	-500.00	-250.00	0.00	250.00	500.00	750.00	1000.00	1250.00	1500.00



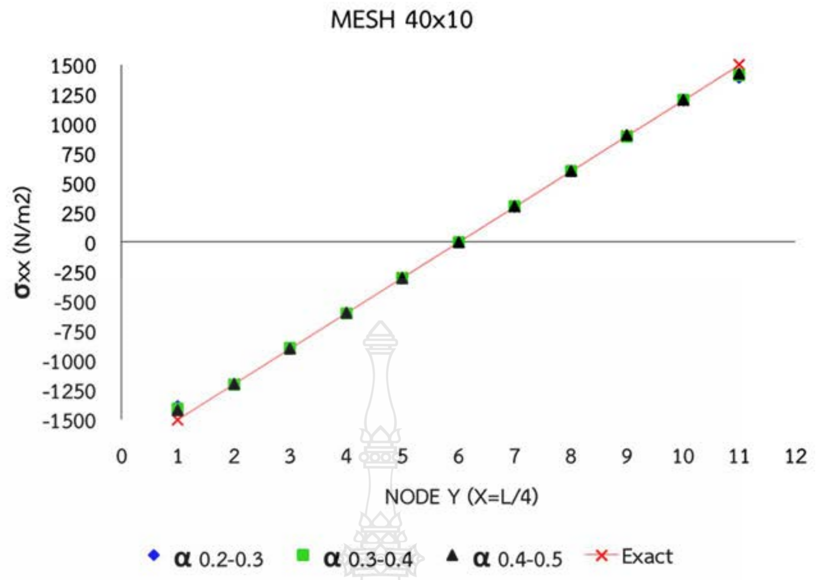
รูปที่ 4.14 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 16x4 (ระยะ L/4)



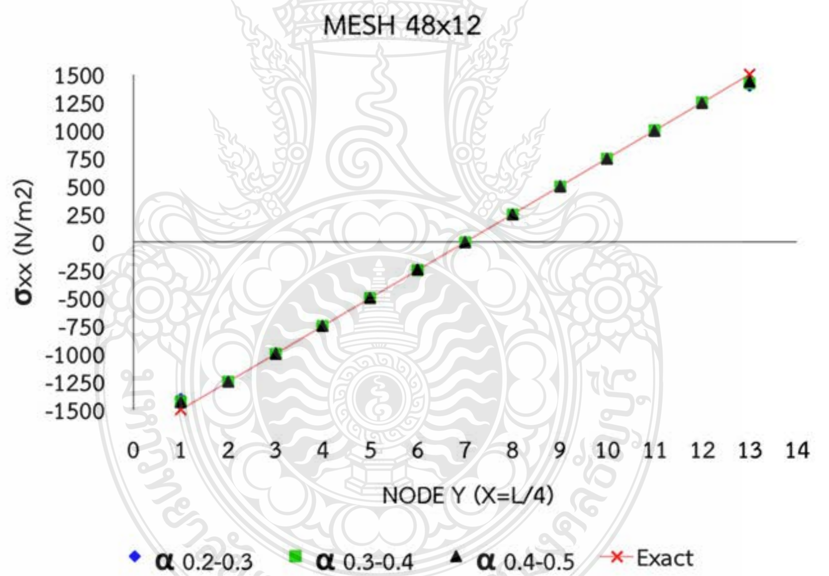
รูปที่ 4.15 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 24x6 (ระยะ L/4)



รูปที่ 4.16 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 32x8 (ระยะ L/4)



รูปที่ 4.17 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 40x10 (ระยะ L/4)



รูปที่ 4.18 Normal stress เทียบกับ Exact Solution โครงตาข่ายขนาด 48x12 (ระยะ L/4)

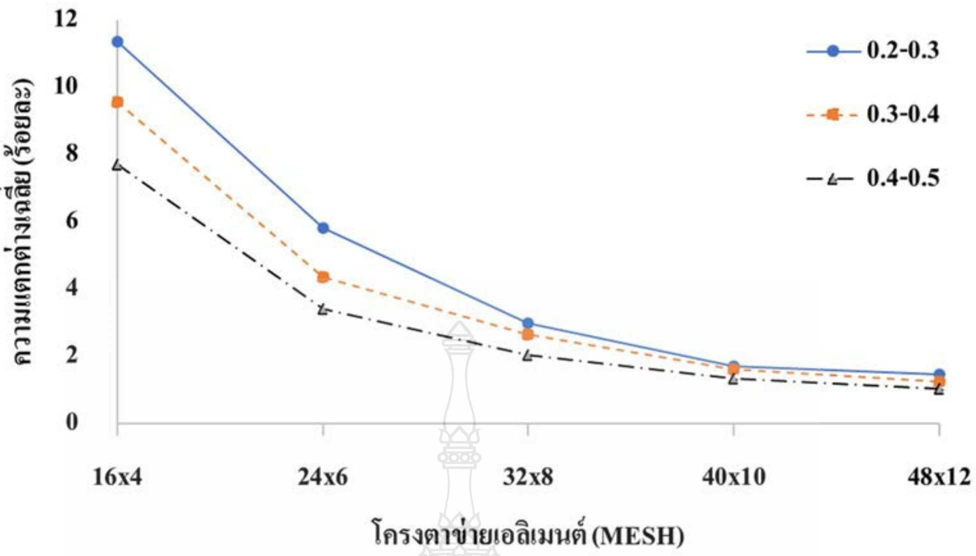
จากตารางที่ 4.9 ถึง 4.13 ค่าความเค้นตั้งฉากที่ตำแหน่งหน้าตัดคานระยะ L/4 จากจุดรองรับ สำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) และค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ก็กระทำในลักษณะเดียวกันกับการเปรียบเทียบที่ตำแหน่งหน้าตัด L/2 ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เมื่อเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของจุดต่อที่ 2 และจุดต่อที่ Ny (จากรูปที่ 4.7) พบว่าในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเป็นร้อยละ 2.74, 1.44, 0.66, 0.30 และ

0.29 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 1.90, 0.81, 0.55, 0.22 และ 0.05 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยมีค่าเป็นร้อยละ 1.47, 0.39, 0.10, 0.02 และ 0.06 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ แสดงได้ดังตารางที่ 4.14

ตารางที่ 4.14 ค่าร้อยละของความแตกต่าง σ_{xx} ระหว่าง CS-FEM กับค่า EXACT (ระยะ L/4)

ความแตกต่าง CS-FEM / EXACT (ร้อยละ)					
α	**Mesh 16x4**	**Mesh 24x6**	**Mesh 32x8**	**Mesh 40x10**	**Mesh 48x12**
0.2-0.3	2.74	1.44	0.66	0.30	0.29
0.3-0.4	1.90	0.81	0.55	0.22	0.05
0.4-0.5	1.47	0.39	0.10	0.02	0.06

จากตารางที่ 4.9 ถึง 4.13 เมื่อทำการหาค่าเฉลี่ยของค่าความแตกต่างของผลการวิเคราะห์จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของทุกจุดต่อในตำแหน่งที่อยู่ถัดจากจุดกึ่งกลางกลางหน้าตัดไปทางด้านขอบบนและขอบล่าง พบว่า ที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 11.35, 5.79, 2.98, 1.70 และ 1.43 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 9.56, 4.33, 2.64, 1.61 และ 1.23 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 7.71, 3.39, 2.03, 1.34 และ 1.03 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 ค่าเฉลี่ยของความแตกต่าง σ_{xx} บนหน้าตัดคานที่ระยะ L/4

4.3 ความเค้นเฉือนในระนาบ (Shear Stress)

ค่าความเค้นเฉือนที่ตำแหน่งหน้าตัดคานระยะ L/2 และ L/4 นั้นมีขนาดและลักษณะการกระจายตัวเท่ากันตลอดทั้งช่วงความยาวคานตัวอย่าง ในการแสดงผลการวิเคราะห์และเปรียบเทียบนั้นจะแสดงเฉพาะผลที่ได้จากหน้าตัดที่ระยะ L/2 ในลักษณะเดียวกันกับความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ค่าความเค้นเฉือนในระนาบ $\sigma_{xy}(x,y)$ สามารถแสดงผลได้ดังตารางที่ 4.15 ถึง 4.19 โดยเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) ที่ได้จากการใช้ช่วงอัตราส่วน α ทั้ง 3 ค่ากับค่าที่ได้จากทฤษฎี (Exact solution) ค่าความเค้นเฉือนมากสุดทางทฤษฎีเกิดขึ้น ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของหน้าตัด (Y=0) ซึ่งมีค่าเท่ากับ -125 นิวตันต่อตารางเมตร สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดัง รูปที่ 4.20 ถึง 4.24

ตารางที่ 4.15 ค่า σ_{xy} และค่าทางทฤษฎีสำหรับโครงตาข่ายขนาด 16x4

Mesh 16x4					
α	node				
	1	2	3	4	5
0.2-0.3	-42.20	-84.30	-110.62	-82.39	-47.67
0.3-0.4	-46.43	-84.76	-112.00	-81.22	-47.52
0.4-0.5	-45.11	-80.00	-114.17	-82.10	-46.08
Exact	0.00	-93.75	-125.00	-93.75	0.00

ตารางที่ 4.16 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ และค่าทางทฤษฎีสำหรับโครงตาข่ายขนาด 24x6

Mesh 24x6							
α	node						
	1	2	3	4	5	6	7
0.2-0.3	-34.87	-63.99	-105.63	-118.43	-104.25	-67.04	-33.72
0.3-0.4	-36.29	-63.01	-104.57	-120.46	-103.75	-65.04	-33.53
0.4-0.5	-32.86	-66.43	-105.49	-117.97	-105.37	-63.93	-33.15
Exact	0.00	-69.44	-111.11	-125.00	-111.11	-69.44	0.00

ตารางที่ 4.17 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ และค่าทางทฤษฎีสำหรับโครงตาข่ายขนาด 32x8

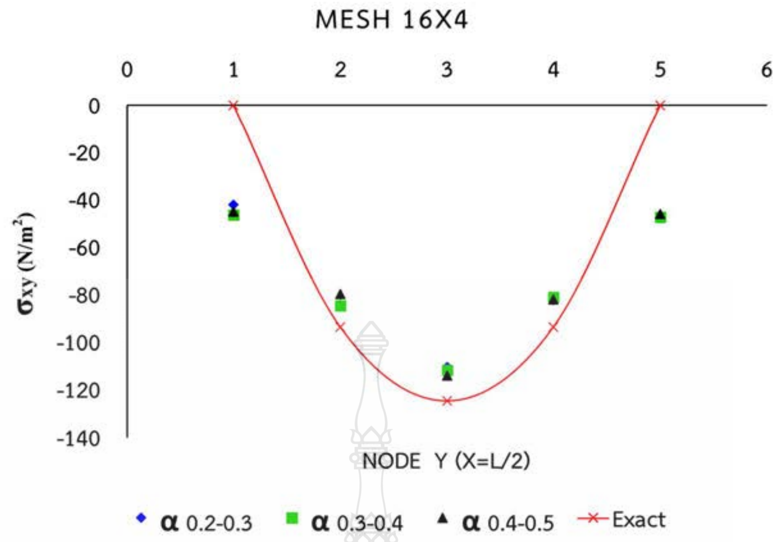
Mesh 32x8									
α	node								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-24.38	-53.55	-91.81	-112.93	-121.63	-114.55	-90.62	-51.49	-27.82
0.3-0.4	-25.18	-52.62	-90.15	-114.43	-121.09	-114.03	-89.85	-52.16	-26.90
0.4-0.5	-26.33	-53.31	-91.13	-115.00	-121.12	-112.80	-90.78	-52.98	-26.82
Exact	0.00	-54.69	-93.75	-117.19	-125.00	-117.19	-93.75	-54.69	0.00

ตารางที่ 4.18 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ และค่าทางทฤษฎีสำหรับโครงตาข่ายขนาด 40x10

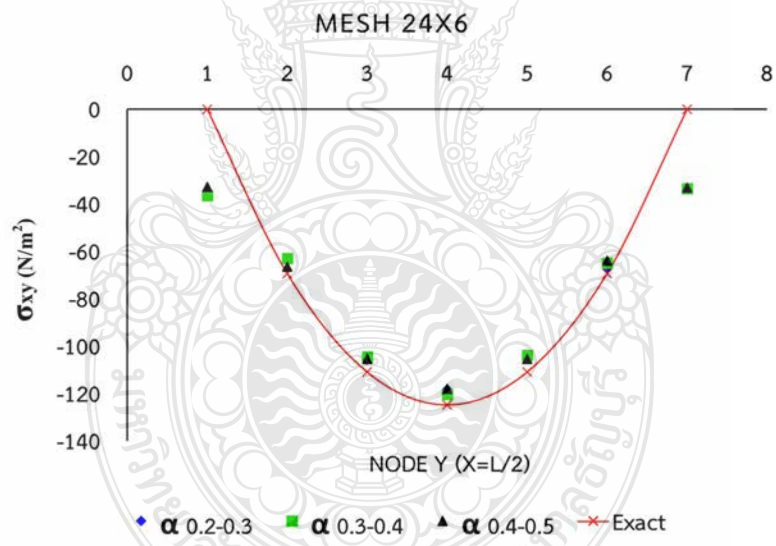
Mesh 40x10											
α	node										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.2-0.3	-21.14	-44.61	-78.13	-102.94	-116.89	-123.52	-117.64	-103.41	-76.84	-42.22	-21.86
0.3-0.4	-22.09	-43.55	-77.16	-103.72	-117.69	-123.09	-117.62	-103.15	-77.88	-43.36	-22.46
0.4-0.5	-20.65	-42.71	-78.84	-102.34	-118.54	-122.37	-119.06	-102.51	-77.84	-43.17	-20.97
Exact	0.00	-45.00	-80.00	-105.00	-120.00	-125.00	-120.00	-105.00	-80.00	-45.00	0.00

ตารางที่ 4.19 ค่า $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ และค่าทางทฤษฎีสำหรับโครงตาข่ายขนาด 48x12

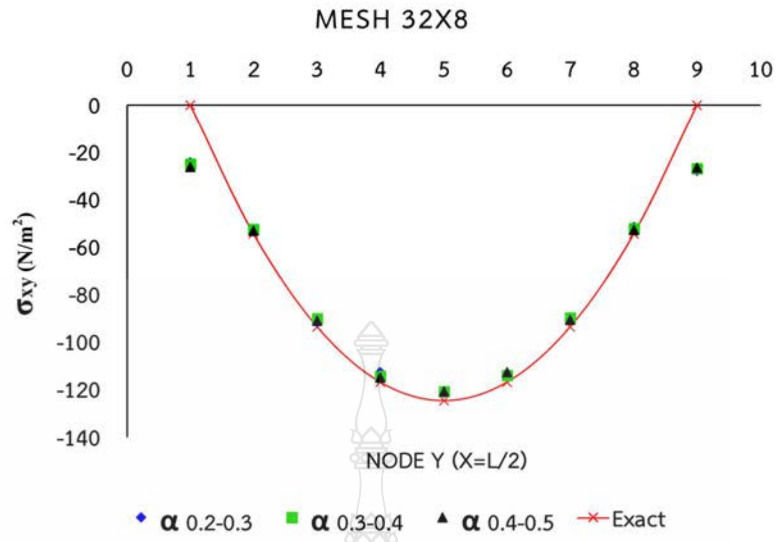
Mesh 48x12													
α	node												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-18.15	-38.03	-67.93	-92.95	-110.01	-120.72	-122.75	-119.76	-110.11	-92.48	-67.62	-36.58	-18.90
0.3-0.4	-18.39	-36.24	-67.94	-92.45	-109.37	-120.88	-123.04	-120.72	-108.16	-92.46	-68.97	-36.75	-19.00
0.4-0.5	-18.09	-37.40	-67.51	-92.34	-109.14	-120.14	-123.10	-120.72	-109.87	-91.19	-67.98	-35.36	-19.16
Exact	0.00	-38.19	-69.44	-93.75	-111.11	-121.53	-125.00	-121.53	-111.11	-93.75	-69.44	-38.19	0.00



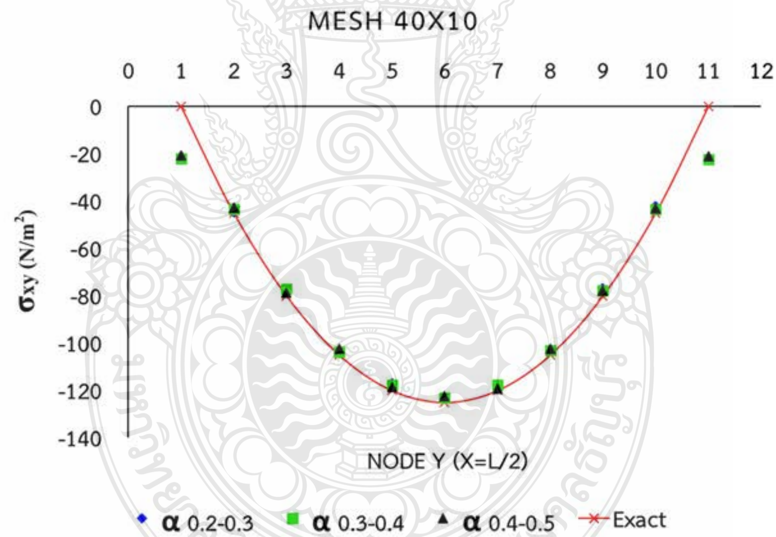
รูปที่ 4.20 ความเค้นเฉือนเทียบกับค่าทางทฤษฎี โครงตาข่ายขนาด 16x4



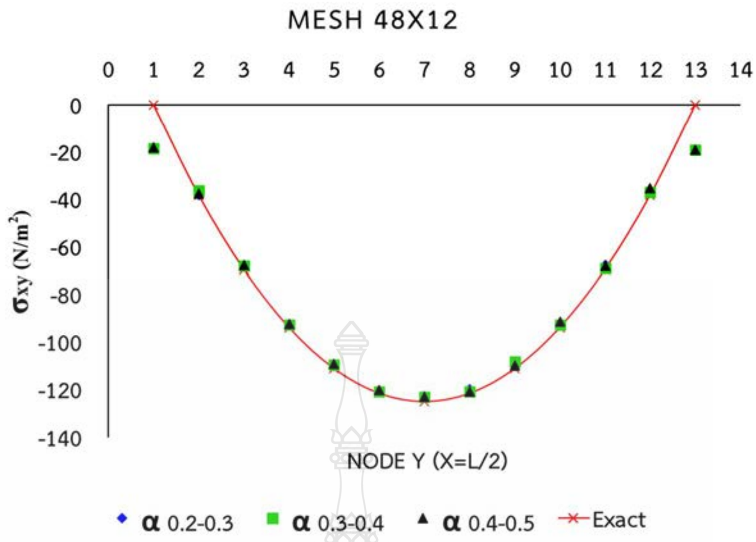
รูปที่ 4.21 ความเค้นเฉือนเทียบกับค่าทางทฤษฎี โครงตาข่ายขนาด 24x6



รูปที่ 4.22 ความเค้นเฉือนเทียบกับค่าทางทฤษฎี โครงตาข่ายขนาด 32x8



รูปที่ 4.23 ความเค้นเฉือนเทียบกับค่าทางทฤษฎี โครงตาข่ายขนาด 40x10



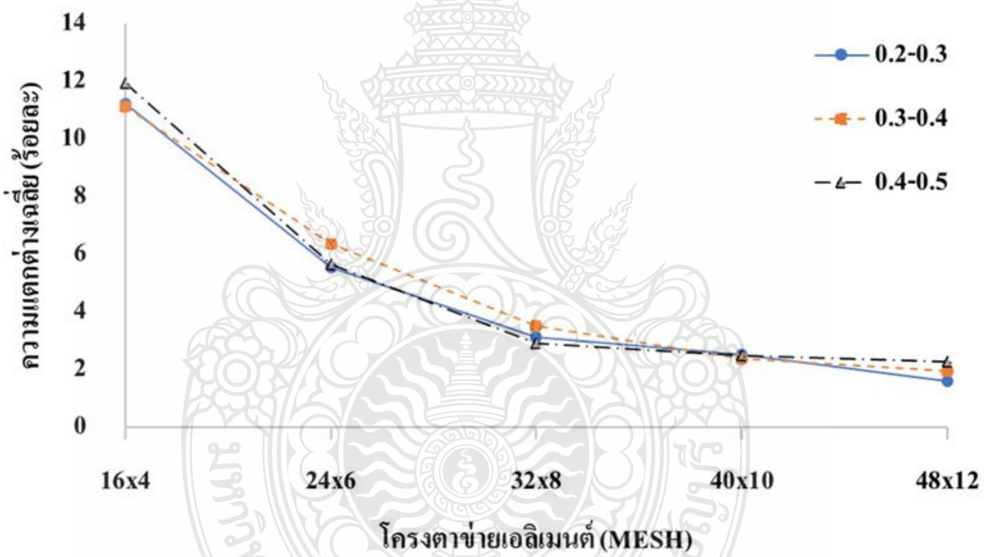
รูปที่ 4.24 ความเค้นเฉือนเทียบกับค่าทางทฤษฎี โครงตาข่ายขนาด 48x12

จากตารางที่ 4.15 ถึง 4.19 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันกับความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 11.50, 5.26 , 2.70 , 1.18 และ 1.80 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 10.40 , 3.63 , 3.10 , 2.11 และ 1.52 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 8.66 , 5.63 , 3.10 , 2.11 และ 1.52 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ แสดงได้ดังตารางที่ 4.20

ตารางที่ 4.20 ค่าร้อยละของความแตกต่าง σ_{xy} ระหว่าง CS-FEM กับค่า EXACT ที่กึ่งกลาง

	ความแตกต่าง CS-FEM / EXACT (ร้อยละ)				
α	Mesh 16x4	Mesh 24x6	Mesh 32x8	Mesh 40x10	Mesh 48x12
0.2-0.3	11.50	5.26	2.70	1.18	1.80
0.3-0.4	10.40	3.63	3.13	1.53	1.57
0.4-0.5	8.66	5.63	3.10	2.11	1.52

จากตารางที่ 4.15 ถึง 4.19 ในลักษณะเดียวกับค่าเค้นตั้งฉาก เมื่อทำการหาค่าเฉลี่ยของค่าความแตกต่างของผลการวิเคราะห์จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เมื่อเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) ของทุกจุดต่อในตำแหน่งที่อยู่ถัดจากขอบบนและขอบล่างเข้ามาหนึ่งตำแหน่ง (รูปที่ 4.7 ตำแหน่งที่ 2 ถึง Ny) พบว่าที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 11.23, 5.54, 3.13, 2.50 และ 1.59 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 11.12, 6.35, 3.51, 2.39 และ 1.95 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตรา α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 11.92, 5.63, 2.90, 2.48 และ 2.26 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ ดังรูปที่ 4-25 แสดงถึงร้อยละความแตกต่างระหว่างค่าดังกล่าวที่แปรผันไปตามขนาดของโครงตาข่าย ซึ่งพบว่าการเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้มีความละเอียดมากขึ้นจะส่งผลให้ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) มากกว่าการเพิ่มค่าของอัตราส่วน α



รูปที่ 4.25 ค่าเฉลี่ยของความแตกต่าง σ_{xy} บนหน้าตัดคานที่ระยะ L/2

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

ในเนื้อหาบทนี้จะกล่าวถึงการสรุปผลที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้ รวมทั้งข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์และแนวทางต่อการวิจัยอย่างต่อเนื่องในการศึกษาวิเคราะห์ปัญหาความเค้นของคานยื่นในระนาบ 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 4 โดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า สามารถสรุปผลตามวัตถุประสงค์ได้ดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลจากการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นของคานยื่นในระนาบ 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 4 โดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า โดยใช้ปัญหาคานยื่นปลายเป็นตัวอย่างแบบจำลองคณิตศาสตร์ทำการวิเคราะห์หาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ความเค้นตั้งฉาก (Normal stresses) และความเค้นเฉือน (Shear stress) เปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) สรุปผลได้ดังต่อไปนี้

5.1.1 ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact Solution) มีค่าเท่ากับ 8.900×10^{-3} m ผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) ลู่เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) เมื่อช่วงอัตราส่วนของ α เพิ่มขึ้นจาก 0.2-0.3 เป็น 0.4-0.5 ขณะที่จำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่มากขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ก็ทำให้ผลการคำนวณจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (CS-FEM) เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) มากขึ้นเช่นเดียวกัน

5.1.2 ความเค้นตั้งฉาก (Normal stresses)

- ตำแหน่งหน้าตัดที่ระยะ L/2 ที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 10.61, 5.19, 3.10, 1.78 และ 1.38 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 9.67, 4.31, 2.28, 1.87 และ 1.15 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 6.71, 3.37, 2.18, 1.35 และ 1.11 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.13
- ตำแหน่งหน้าตัดที่ระยะ L/4 ที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 11.35, 5.79, 2.98, 1.70 และ 1.43 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 9.56, 4.33, 2.64, 1.61 และ 1.23 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วนของ α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 7.71, 3.39, 2.03, 1.34 และ 1.03 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.19

ค่าความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) พบว่า มีแนวโน้มลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีเมื่อมีการเพิ่มค่าของจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์หรือค่าของอัตราส่วน α ค่าใดค่าหนึ่งหรือรวมกันทั้งสองแบบ แต่ในกรณี

การแบ่งโครงข่ายเอลิเมนต์ที่มีขนาดหยาบ คือ โครงตาข่ายขนาด 16x4 และ 24x6 นั้น ค่าของอัตราส่วน α จะส่งผลต่อร้อยละของค่าเฉลี่ยความแตกต่างอย่างชัดเจน และความแตกต่างของร้อยละค่าเฉลี่ยนั้นจะลดลงเมื่อเพิ่มขนาดของโครงตาข่ายให้มีความละเอียดขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่าในช่วงที่มีการแบ่งโครงข่ายเอลิเมนต์แบบหยาบนั้น การเลือกใช้ค่าอัตราส่วน α ที่สูงถึง 0.4-0.5 จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า แต่เมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์มากขึ้นการกำหนดค่าอัตราส่วน α จะไม่ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

5.1.3 ความเค้นเฉือนในระนาบ (Shear Stress) ตลอดความลึกของหน้าตัดคานที่ระยะ L/2 จากจุดรองรับ กรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็น ร้อยละ 11.23, 5.54, 3.13, 2.50 และ 1.59 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 กรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 11.12, 6.35, 3.51, 2.39 และ 1.95 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.4-0.5 พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแตกต่างเป็นร้อยละ 11.92, 5.63, 2.90, 2.48 และ 2.26 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 โดยพบว่าค่าความเค้นเฉือนมีค่าลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงเมื่อทั้งค่าของอัตราส่วน α และจำนวนของโครงตาข่ายเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น มีข้อสังเกตจากการวิเคราะห์ในครั้งนี้ว่าการเพิ่มขึ้นของค่าอัตราส่วน α ที่ใช้ มีส่วนทำให้ค่าผลลัพธ์เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎี (Exact solution) น้อยกว่าการเพิ่มขึ้นของจำนวนการเอลิเมนต์ หรืออาจกล่าวได้ว่าการเพิ่มอัตราส่วน α ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญมากกว่าการเพิ่มของจำนวนโครงตาข่าย

ในกรณีของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติทั่ว ๆ ไปนั้น ข้อเท็จจริงดังกล่าว อาจไม่ส่งผลต่อการคำนวณอย่างชัดเจนสำหรับปัญหาพื้นฐานทั่วไป แต่สำหรับในกรณีที่รูปทรงของปัญหาในการวิเคราะห์มีความไม่ต่อเนื่องกันจนทำให้เกิดความเค้นชุมนุม (Stress concentration) ขึ้นในบริเวณใดบริเวณหนึ่งหรือในบริเวณที่ปลายรอยแตก (Cracks) ที่เกิดความเค้นเอกฐาน (Stress singularity) ปัญหาที่โดเมนมีแตกต่างกัน (Multiple domains) ปัญหาที่มีโครงตาข่ายไม่สอดคล้องกัน (Non-conforming/Non-matching problems) เป็นต้นนั้น อาจสามารถลดเวลาโดยรวมของการวิเคราะห์ลงได้ โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักในบริเวณดังกล่าวออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอย่อย ที่มีอัตราส่วน α ของด้านแต่ละด้านให้ไม่เท่ากัน ($\alpha_x \neq \alpha_y$) ในขณะที่บริเวณอื่น ๆ ซึ่งไกลออกไปจากบริเวณดังกล่าวและไม่ส่งผลกระทบกับค่าที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น อาจพิจารณาใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยกว่าควบคู่ไปกับการใช้โดเมนสม่ำเสมอย่อยแบบด้านคงที่ คือกำหนดให้อัตราส่วน α_x มีค่าเท่ากับα_y นั้นอาจส่งผลให้การคำนวณที่ได้มีความถูกต้องและแม่นยำอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงอย่างมาก เนื่องจากไม่ต้องทำการ mapping ระหว่าง physical element และ parents element หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือไม่ต้องคำนวณหาค่าดีเทอมิเนนของเมทริกซ์จาโคเบียนนั่นเอง

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับงานวิจัยในขั้นต่อไปนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยแบบ Semi-Unit Cell กับรูปทรงทางเรขาคณิตของปัญหาที่ใช้เอลิเมนต์แบบ RVE (Representative Volume Element) ร่วมกับเงื่อนไขขอบแบบซ้ำกัน (Periodic Boundary Conditions) ในการวิเคราะห์ รวมทั้งการวิเคราะห์ปัญหาด้านพลศาสตร์ (Dynamics Analysis) และปัญหาของความไม่เชิงเส้น (Nonlinearity Analysis) เป็นสิ่งที่ควรศึกษาเพื่อหาแนวทางในการปรับปรุงวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขให้มีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้นไป

บรรณานุกรม

[1] Bathe K-J. Finite element procedures prentice hall. New Jersey. 1996.

[2] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ. The finite element method: its basis and fundamentals: Elsevier; 2005.

[3] Hughes TJ. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis: Courier Corporation; 2012.

[4] Liu, G.; Trung, N.T. Smoothed Finite Element Methods; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2010.

[5] Liu, G.R.; Dai, K.Y.; Nguyen, T.T. A smoothed finite element method for mechanics problems. Comput. Mech. 2007, 39, 859–877.

[6] Dai K, Liu G, Nguyen T. An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics. Finite elements in analysis and design. 2007;43(11-12):847-60.

[7] Liu G, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T, Xu X. A novel Galerkin-like weak form and a superconvergent alpha finite element method (SαFEM) for mechanics problems using triangular meshes. Journal of Computational Physics. 2009;228(11):4055-87.

[8] Liu G, Zhang G. A normed G space and weakened weak (W^2) formulation of a cell-based smoothed point interpolation method. International Journal of Computational Methods. 2009;6(01):147-79.

[9] Hamrani A, Habib SH, Belaidi I. CS-IGA: A new cell-based smoothed isogeometric analysis for 2D computational mechanics problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017;315:671-90.

[10] Wang D, Zhang H, Xuan J. A strain smoothing formulation for NURBS-based isogeometric finite element analysis. Science China Physics, Mechanics and Astronomy. 2012;55(1):132-40.

[11] Bordas SP, Rabczuk T, Hung N-X, Nguyen VP, Natarajan S, Bog T, et al. Strain smoothing in FEM and XFEM. Computers & structures. 2010;88(23-24):1419-43.

[12] Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates. Communications in Numerical Methods in Engineering. 2009;25(8):882-906.

[13] Dai K, Liu G. Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM). Journal of Sound and Vibration. 2007;301(3-5):803-20.

บรรณานุกรม (ต่อ)

[14] MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2019b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.; 2018.

[15] Felippa CA. Introduction to finite element methods (Lecture note). University of Colorado. 2004.

[16] Liu G-R. Meshfree methods: moving beyond the finite element method: Taylor & Francis; 2009.

[17] Chen JS, Wu CT, Yoon S, You Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. International journal for numerical methods in engineering. 2001;50(2):435-66.

[18] Liu G. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods. International Journal of Computational Methods. 2008;5(02):199-236.

[19] Timoshenko S, Goodier J. Theory of Elasticity, 3rd ed McGraw-Hill. New York. 1970.

[20] Hughes TJR. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic FiniteElement Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.1987

[21] Liu GR, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, Dai KY, and Lam KY. On the essence and the evaluation of the shape functions for the smoothed finite element method (SFEM) (Letter to Editor). International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009; 77: 1863–1869.

[22] LiuGRand ZhangGY. AnormedGspace and a cell-based smoothed point interpolation method. International Journal of Computational Methods. 2009; 6(1): 147–179.

[23] Zienkiewicz OC and Taylor RL. The Finite Element Method, 5th edition. Butterworth Heinemann, Oxford.;2000.

[24] Hung N-X, Stéphane B, and Hung N-D. Smooth finite element methods: Convergence, accuracy and properties. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008; 74: 175–208.

[25] Cui XY, Liu GR, Li GY, Zhao X, Nguyen-Thoi T, and Sun GY.Asmoothed finite element method (SFEM) for linear and geometrically nonlinear analysis of plates and shells. CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences. 2008.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ตัวอย่างโปรแกรม

1. แสดงสถานการณ์ทำงานในแต่ละขั้นตอน

1.1 การทำงานในรอบการคำนวณที่ 1 เพื่อหาคำตอบ โดยสำหรับ Mesh 16x4 ที่ alpha 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

Starting Program.....

```
 Starting mesh#1 ==> Mesh: 16x4
  Starting alpha#1 ==> alpha = 0.2-0.3
   Element Level calculations.....
   Apply BCs and Loads Conditions.....
   Solving Nodal Displacement.....
   Stresses Calculation Processing.....
  End of alpha#1
  Starting alpha#2 ==> alpha = 0.3-0.4
   Element Level calculations.....
   Apply BCs and Loads Conditions.....
   Solving Nodal Displacement.....
   Stresses Calculation Processing.....
  End of alpha#2
  Starting alpha#3 ==> alpha = 0.4-0.5
   Element Level calculations.....
   Apply BCs and Loads Conditions.....
   Solving Nodal Displacement.....
   Stresses Calculation Processing.....
  End of alpha#3
 End of Mesh#1
```

1.2 การทำงานในรอบการคำนวณที่ 2 เพื่อหาคำตอบ โดยสำหรับ Mesh 24x6 ที่ alpha 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

```
 Starting mesh#2 ==> Mesh: 24x6
  Starting alpha#1 ==> alpha = 0.2-0.3
   Element Level calculations.....
   Apply BCs and Loads Conditions.....
   Solving Nodal Displacement.....
   Stresses Calculation Processing.....
  End of alpha#1
  Starting alpha#2 ==> alpha = 0.3-0.4
   Element Level calculations.....
   Apply BCs and Loads Conditions.....
   Solving Nodal Displacement.....
   Stresses Calculation Processing.....
```

End of alpha#2
Starting alpha#3 ==> alpha = 0.4-0.5
Element Level calculations.....
Apply BCs and Loads Conditions.....
Solving Nodal Displacement.....
Stresses Calculation Processing.....
End of alpha#3
End of Mesh#2

1.3 การทำงานในรอบการคำนวณที่ 3 เพื่อหาคำตอบ โดยสำหรับ Mesh 32x8 ที่ alpha 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

Starting mesh#3 ==> Mesh: 32x8
Starting alpha#1 ==> alpha = 0.2-0.3
Element Level calculations.....
Apply BCs and Loads Conditions.....
Solving Nodal Displacement.....
Stresses Calculation Processing.....
End of alpha#1
Starting alpha#2 ==> alpha = 0.3-0.4
Element Level calculations.....
Apply BCs and Loads Conditions.....
Solving Nodal Displacement.....
Stresses Calculation Processing.....
End of alpha#2
Starting alpha#3 ==> alpha = 0.4-0.5
Element Level calculations.....
Apply BCs and Loads Conditions.....
Solving Nodal Displacement.....
Stresses Calculation Processing.....
End of alpha#3
End of Mesh#3

1.4 การทำงานในรอบการคำนวณที่ 4 เพื่อหาคำตอบ โดยสำหรับ Mesh 40x10 ที่ alpha 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

Starting mesh#4 ==> Mesh: 40x10
Starting alpha#1 ==> alpha = 0.2-0.3
Element Level calculations.....
Apply BCs and Loads Conditions.....
Solving Nodal Displacement.....
Stresses Calculation Processing.....

```
   End of alpha#1
   Starting alpha#2 ==> alpha = 0.3-0.4
    Element Level calculations.....
    Apply BCs and Loads Conditions.....
    Solving Nodal Displacement.....
    Stresses Calculation Processing.....
   End of alpha#2
   Starting alpha#3 ==> alpha = 0.4-0.5
    Element Level calculations.....
    Apply BCs and Loads Conditions.....
    Solving Nodal Displacement.....
    Stresses Calculation Processing.....
   End of alpha#3
  End of Mesh#4
```

1.5 การทำงานในรอบการคำนวณที่ 5 เพื่อหาคำตอบ โดยสำหรับ Mesh 48x12 ที่ alpha 0.2-0.3 , 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ

```
  Starting mesh#5 ==> Mesh: 48x12
   Starting alpha#1 ==> alpha = 0.2-0.3
    Element Level calculations.....
    Apply BCs and Loads Conditions.....
    Solving Nodal Displacement.....
    Stresses Calculation Processing.....
   End of alpha#1
   Starting alpha#2 ==> alpha = 0.3-0.4
    Element Level calculations.....
    Apply BCs and Loads Conditions.....
    Solving Nodal Displacement.....
    Stresses Calculation Processing.....
   End of alpha#2
   Starting alpha#3 ==> alpha = 0.4-0.5
    Element Level calculations.....
    Apply BCs and Loads Conditions.....
    Solving Nodal Displacement.....
    Stresses Calculation Processing.....
   End of alpha#3
  End of Mesh#5
End of Program.....
```

2. ตัวอย่างการเขียน code วิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โปรแกรม MATLAB

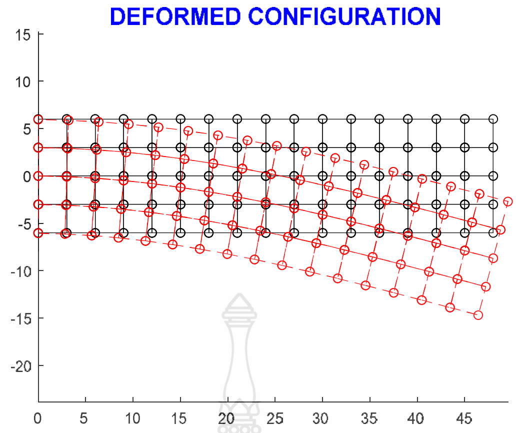
```
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
%Main file of 2D problems using triangular or quadrilateral elements %
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
clear
format long
global ndof sdof edof nel nnel nnode emodule poisson fload
global gcoord ele_nods matmtx method lengthx lengthy nx ny a m path
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
%     1.PREPROCESSOR PHASE                                                                                %
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
clc
delete './RESULTS/*.fig'
example ='cantilever';
%option2=3;
method ='CSFEM_Q4';          %Cell-based smoothed FEM using Q4 elements
nnel =4;                     %Number of nodes per element
nSD =4;
%air=input('Irregular factor of mesh (0.0,...,0.5)=' );
air=0.0;                     %irregular factor of mesh
%type=1;                     %type=1 -plane stress analysis
lengthx=48;                  %length of x-axis side of problem
lengthy=12;                  %length of y-axis side of problem
fload=1000;                  %the total load
emodule=3e7;                 %Elastic modulus
poisson=0.3;                 %Poisson's ratio
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
% 1.4 Compute necessary data from input data                                                              %
%---------------------------------------------------------------------------------------------------------%
ndof=2;                      %number of degrees of freedom (dofs)per node
edof=nnel*ndof;              %Dofs per element
matmtx=get_matmtx(1);        %matrix of material constants
ddisp=zeros(sdof,1);         %system displacement vector
Nodal_Disp =cell(5,3);
Centerline_Disp =cell(5,3);
Tip_Disp =cell(5,3);
Sigma_xx =cell(5,3);
Sigma_xy =cell(5,3);

path ='./RESULTS';
%resultFolder ='./RESULTS';
%addpath(sourceFolder);
disp('Starting Program.....')
%=========================================================================================================%
for m =1 :5                  %5 meshs
    nx =8*(m+1);
    ny =2*(m+1);
    nel =nx*ny;              %Total number of element
    nnode=(nx+1)*(ny+1);     %total number of nodes
    sdof=nnode*ndof;         %total dofs
    disp([' Starting mesh#', num2str(m), ' ==> Mesh:', num2str(nx), 'x',
num2str(ny)])
```

```matlab
for a = 1 :3                    %3 ranges of alpha
 if a ==1
         alpha =[0.2  0.3];
         disp(['   Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha =',...
             num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
 elseif a ==2
         alpha =[0.3  0.4];
         disp(['   Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha =',...
             num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
 else
         alpha =[0.4  0.5];
         disp(['   Starting alpha#', num2str(a), ' ==> alpha =',...
             num2str(alpha(1)), '-', num2str(alpha(2))])
 end

 %initial data of geometry, boundary condition and force vector
 [gcoord,ele_nods,bcdof,bcval,ff]=get_initdata_V03;

 %Plotting main meshes and holding for adding SD's meshes on
       hold on;
       figure(1);
       PLOT_MESH(gcoord,ele_nods,'Q4','ko-');
%------------------------------------------------------------------------------%
%    2.SOLUTION PHASE                                                          %
%------------------------------------------------------------------------------%
%------------------------------------------------------------------------------%
%  2.1 Compute the stiffness matrix                                            %
%------------------------------------------------------------------------------%
 switch method
  case'FEM_T3'
   [K]=cal_K_FEM_T3;
  case'FEM_Q4'
   [K]=cal_K_FEM_Q4(nglx,ngly);
  case'CSFEM_Q4'
   [K,SD_coord,SD_shape]=cal_K_CSFEM_Q4(nSD,alpha);
 end
       text(15,10,['Mesh ',num2str(m),' alpha ',num2str(a)],'Color',...
  'blue','FontSize',20,'FontWeight','bold')
       saveas(gcf,fullfile(path,['Mesh_',num2str(m),'_alpha_',num2str(a)]),'fig')
       delete(gcf)
%------------------------------------------------------------------------------%
%  2.2 Apply the boundary condition                                            %
%------------------------------------------------------------------------------%
       disp('    Element Level calculations....')
       K1=K;    %Save K1=K (before applying bcdof)to compute strain energy E
 [K,ff]=apply_bcdof(K,ff,bcdof,bcval);
       disp('    Apply BCs and Loads Conditions....')
%------------------------------------------------------------------------------%
%2.3 nodal displacement vector                                                 %
%------------------------------------------------------------------------------%
       disp('    Solving Nodal Displacement....')
       ddisp=K\ff;
```

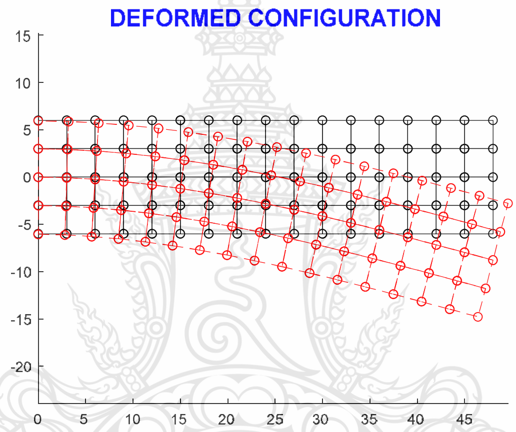
```matlab
%================================================================================================%
  %Visualization purpose
        ux =1:2:2*nnode-1;    uy =2:2:2*nnode;
        XX =ddisp(ux);         YY =ddisp(uy);
        Nodal_Disp{m,a} =[XX, YY];
        dispNorm =max(sqrt(XX.^2+YY.^2));
        dispNorm2 =norm(sqrt(XX.^2+YY.^2));
        scaleFact=1000;
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
%     3. POSTPROCESSOR PHASE                                                                      %
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
% 3.1 compute strain energy of system                                                             %
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
        energy =0.5*ddisp'*K1*ddisp;
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
% 3.2 error norms:displacement, energy, and recovery energy                                      %
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
         norm_E=0;
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
% 3.3 Output error norms and plot the results of displacement and stress                         %
%------------------------------------------------------------------------------------------------%
        disp('     Stresses Calculation Processing....')
  switch method
   case 'FEM_T3'
    [stress_nod,stress_ele]=cal_stress_FEM_T3(ddisp);
                nGauss=7;           %Gauss-Legendre quadrature

[norm_disp,norm_E,norm_Ereco]=cal_norms_FEM_T3(nGauss,ddisp,stress_nod,stress_ele
);
   case 'FEM_Q4'
    [stress_nod]=cal_stress_nod_FEM_Q4(nglx,ngly,ddisp);
                nglx=3; ngly=3;       %3x3 Gauss-Legendre quadrature
    [norm_disp,norm_E,norm_Ereco]=cal_norms_FEM_Q4(nglx,ngly,ddisp,stress_nod);
   case 'CSFEM_Q4'
    [stress_nod]=cal_stress_nod_CSFEM_Q4(nSD,ddisp,SD_coord,SD_shape);
                nglx=3; ngly=3;       %3x3 Gauss-Legendre quadrature
    [norm_disp,norm_Ereco]=cal_norms_CSFEM_Q4(nglx,ngly,ddisp,stress_nod);
  end

%================================================================================================%
  %Plotting Part
        PLOT_DEFORMED(gcoord,ele_nods,scaleFact,XX,YY);

%   [Tip_dd(a,m), Tip_Exact(a,m), dd_sim, dd_exact]=PLOT_TIP(ddisp);
  [Centerline_Disp{m,a},Tip_Disp{m,a}]=PLOT_TIP(ddisp);

  [Sigma_xx{m,a},Sigma_xy{m,a}]=PLOT_STRESSES(stress_nod);

%================================================================================================%
```

```
        disp([' 	End of alpha#', num2str(a)])
 end %End for alpha's loop
    delete(gcf)
    delete(gcf)
    delete(gcf)
    delete(gcf)
    disp([' 	End of Mesh#', num2str(m)])

end  %End for meshing's loop
disp('End of Program.....')
```

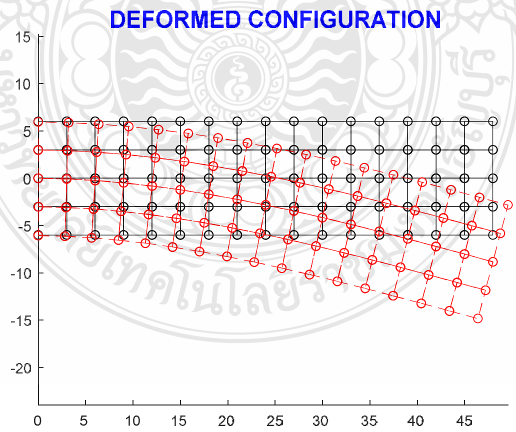
ภาคผนวก ข
ผลการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB



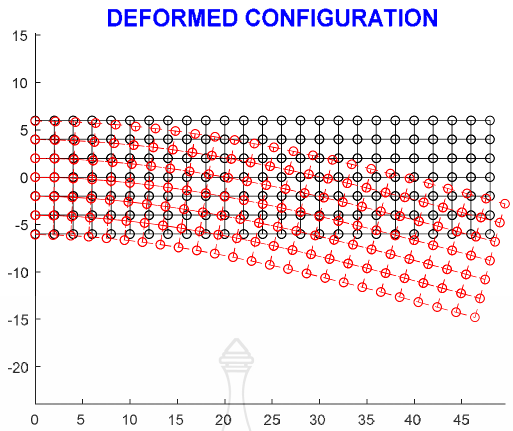
Deformed_Mesh_1_alpha_1



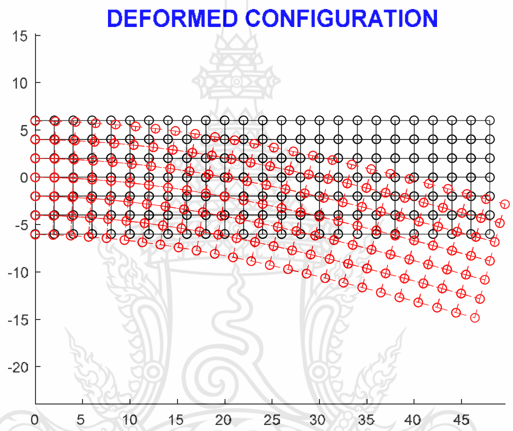
Deformed_Mesh_1_alpha_2



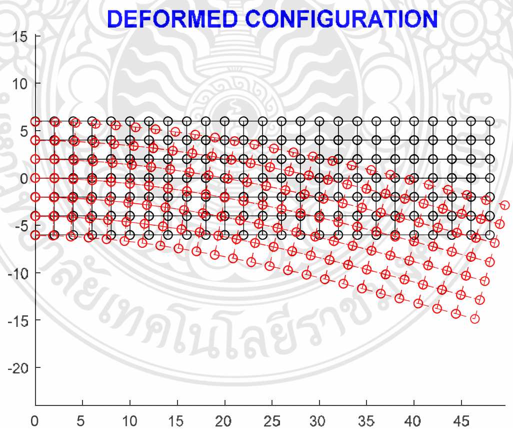
Deformed_Mesh_1_alpha_3



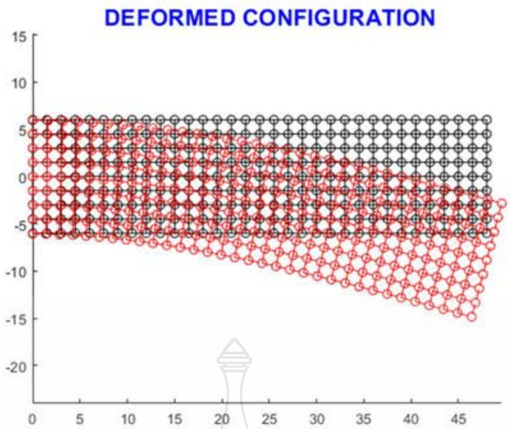
Deformed_Mesh_2_alpha_1



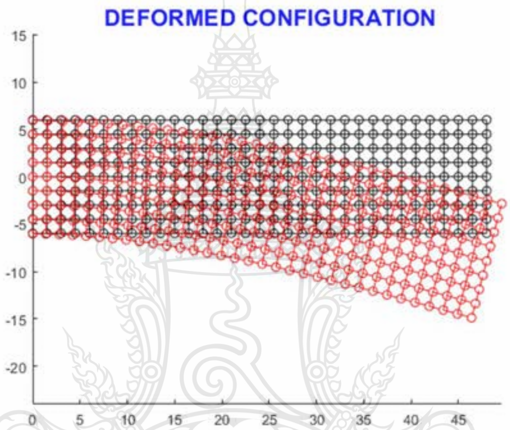
Deformed_Mesh_2_alpha_2



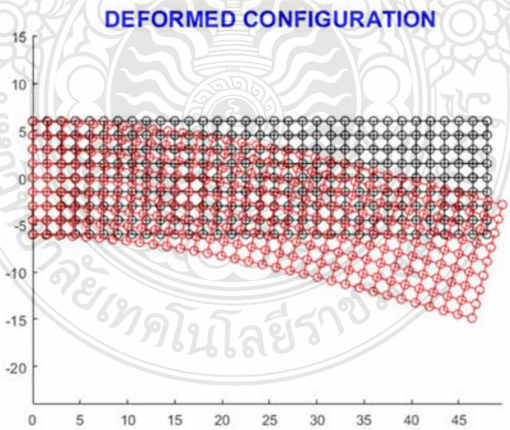
Deformed_Mesh_2_alpha_3



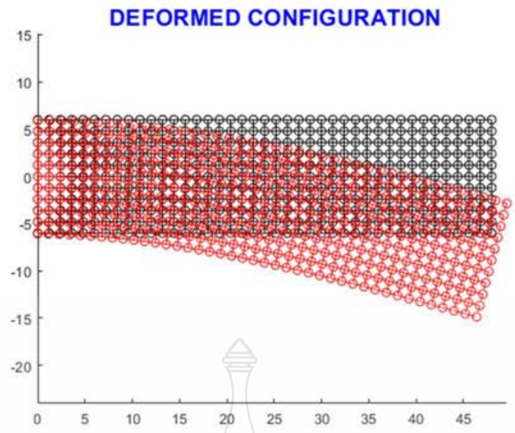
Deformed_Mesh_3_alpha_1



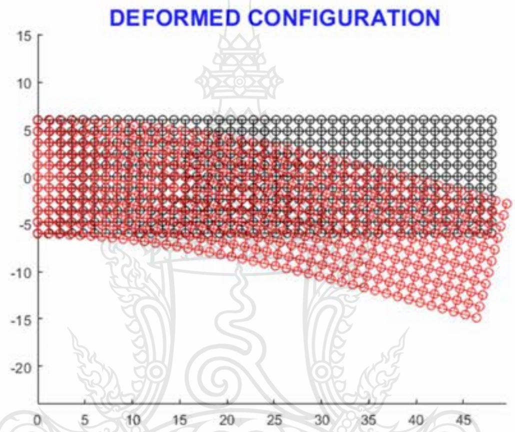
Deformed_Mesh_3_alpha_2



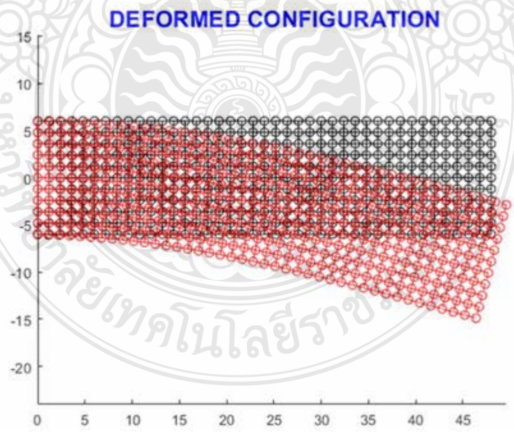
Deformed_Mesh_3_alpha_3



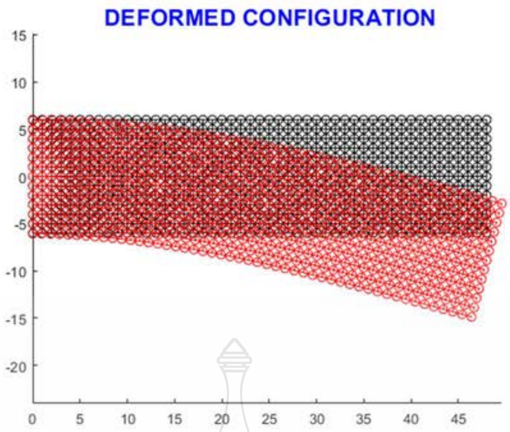
Deformed_Mesh_4_alpha_1



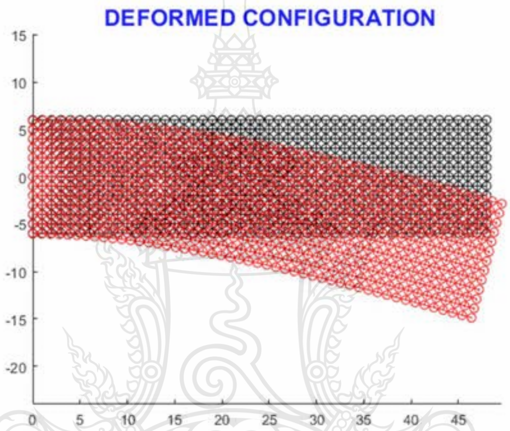
Deformed_Mesh_4_alpha_2



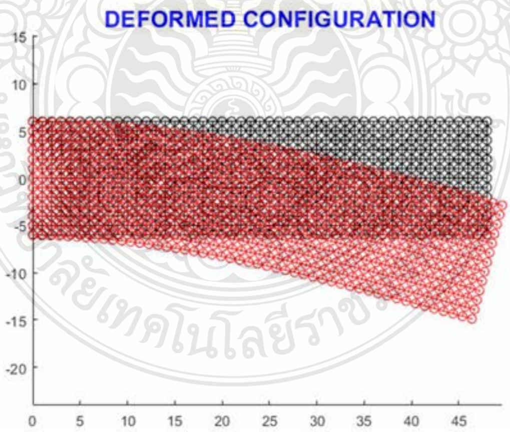
Deformed_Mesh_4_alpha_3



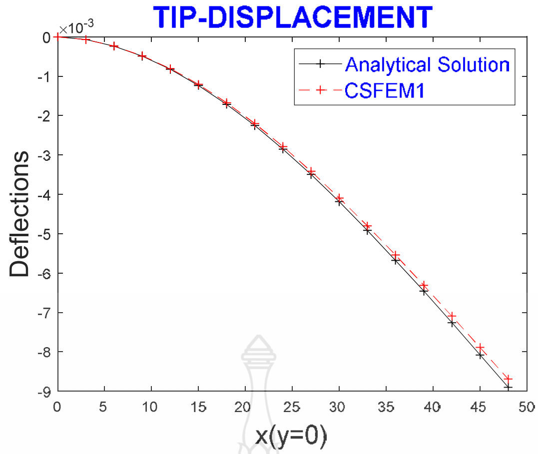
Deformed_Mesh_5_alpha_1



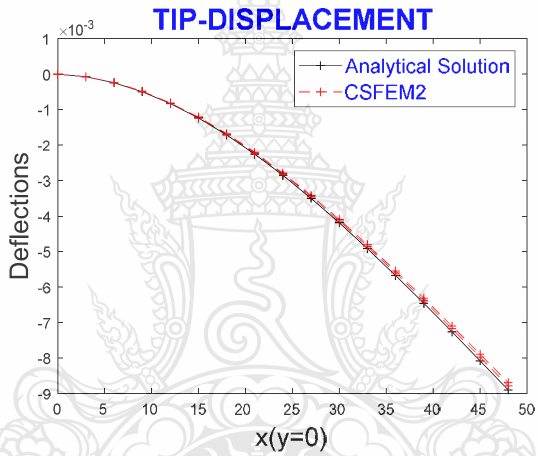
Deformed_Mesh_5_alpha_2



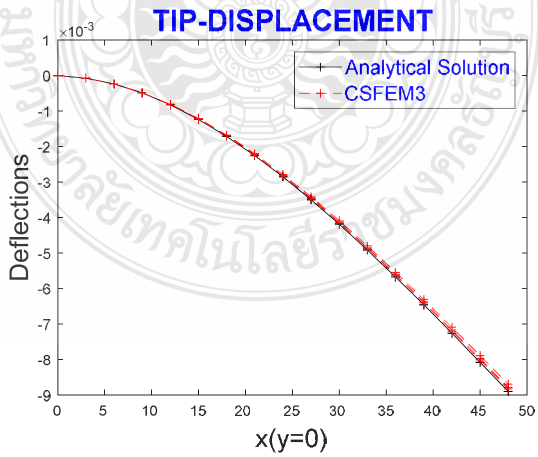
Deformed_Mesh_5_alpha_3



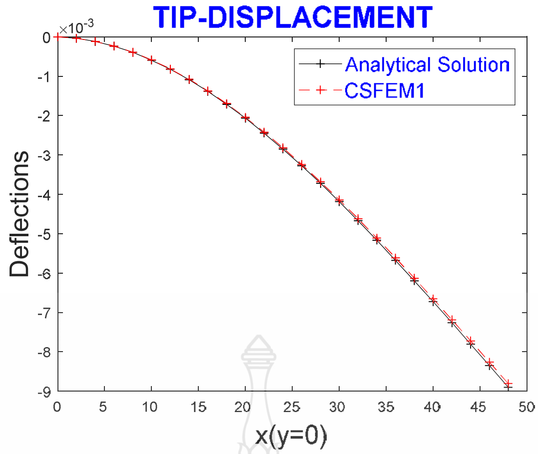
Tip_Disp_Mesh_1_alpha_1



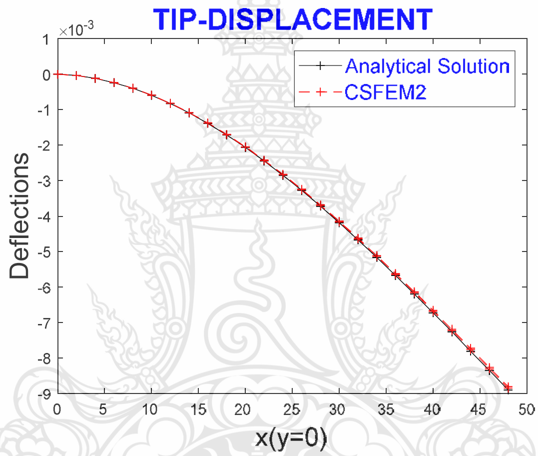
Tip_Disp_Mesh_1_alpha_2



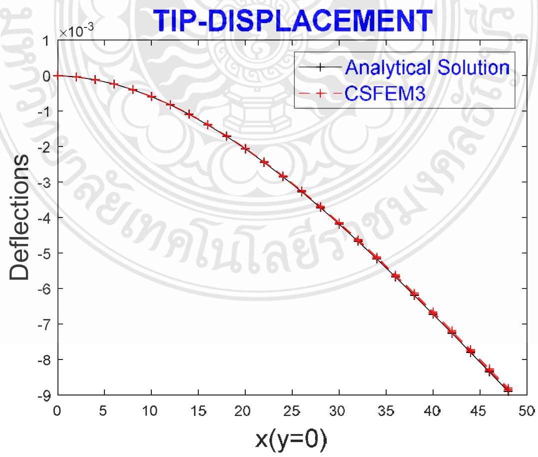
Tip_Disp_Mesh_1_alpha_3



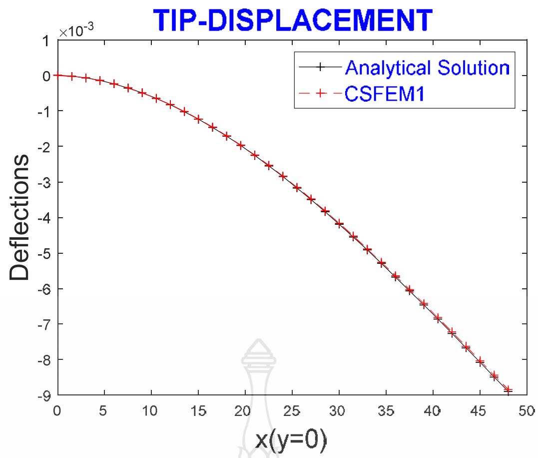
Tip_Disp_Mesh_2_alpha_1



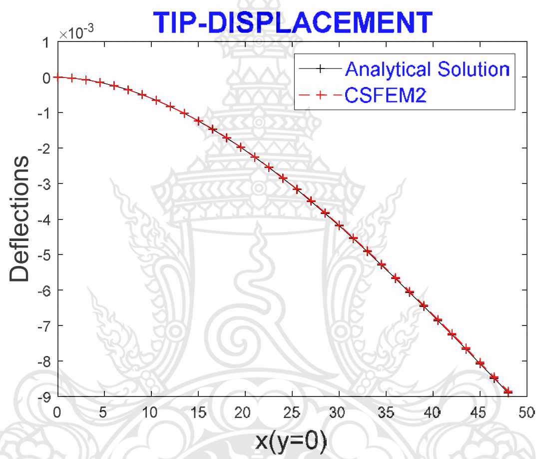
Tip_Disp_Mesh_2_alpha_2



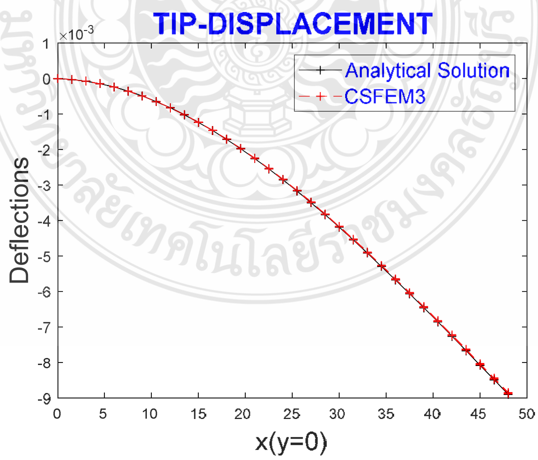
Tip_Disp_Mesh_2_alpha_3



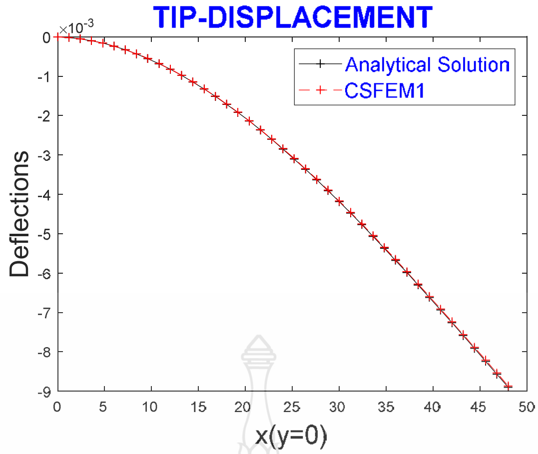
Tip_Disp_Mesh_3_alpha_1



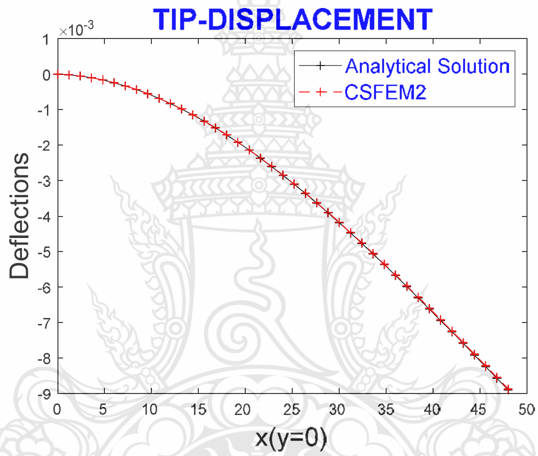
Tip_Disp_Mesh_3_alpha_2



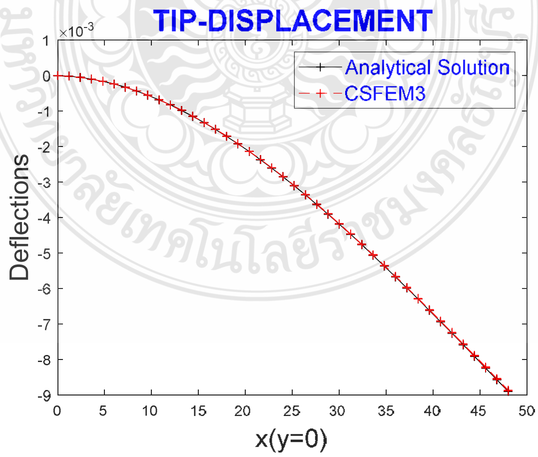
Tip_Disp_Mesh_3_alpha_3



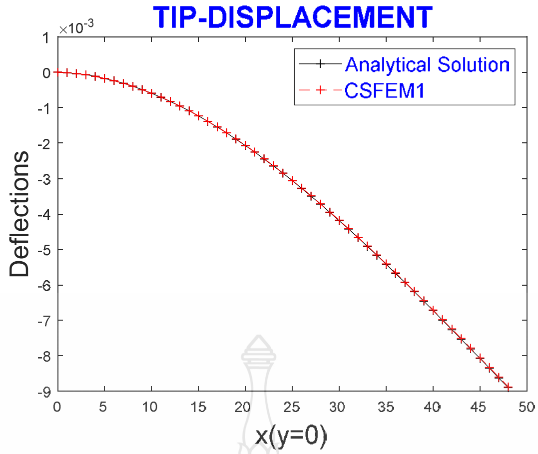
Tip_Disp_Mesh_4_alpha_1



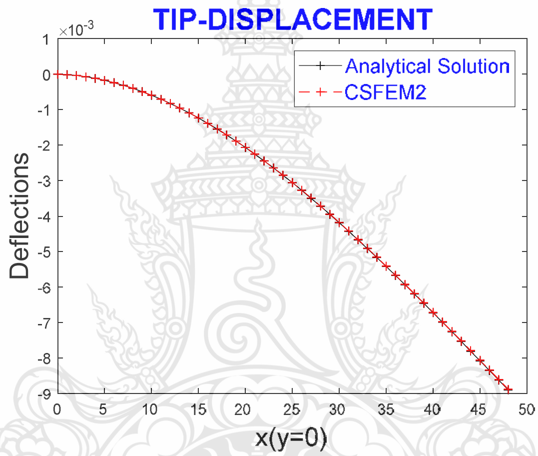
Tip_Disp_Mesh_4_alpha_2



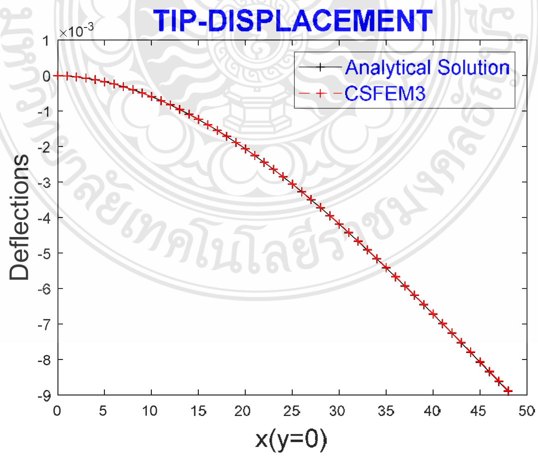
Tip_Disp_Mesh_4_alpha_3



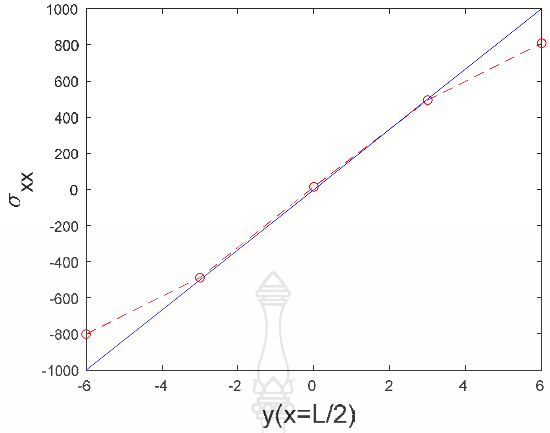
Tip_Disp_Mesh_5_alpha_1



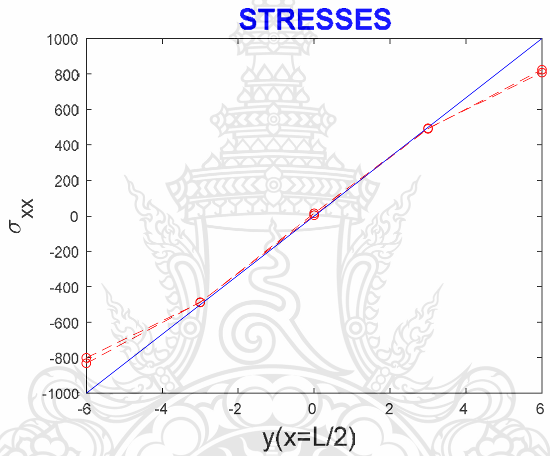
Tip_Disp_Mesh_5_alpha_2



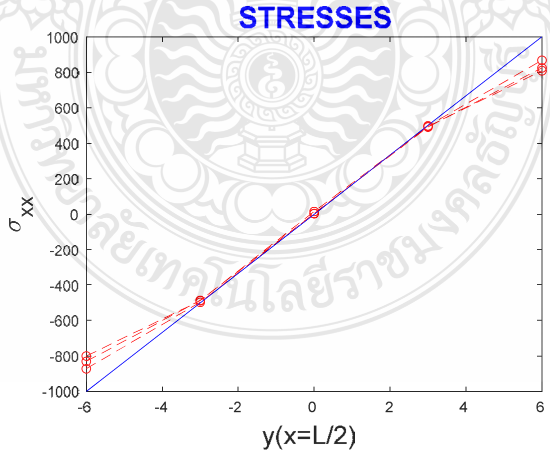
Tip_Disp_Mesh_5_alpha_3



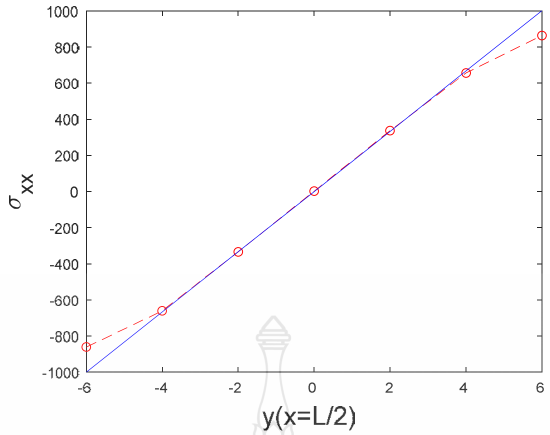
Sigma_xx_Mesh_1_alpha_1



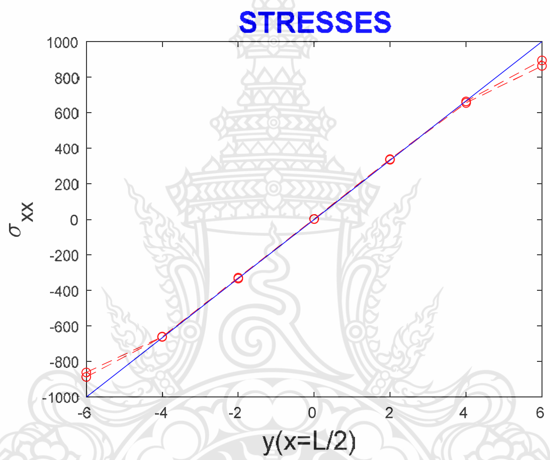
Sigma_xx_Mesh_1_alpha_2



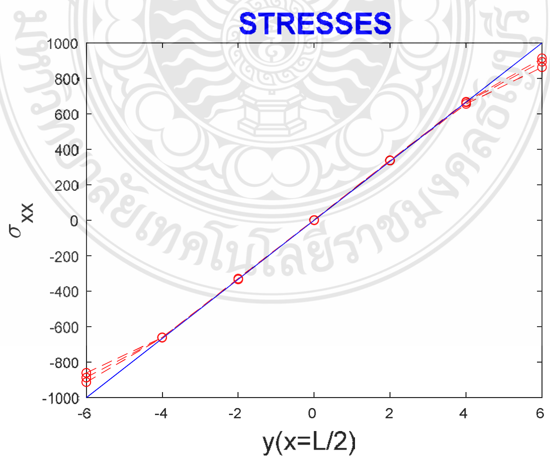
Sigma_xx_Mesh_1_alpha_3



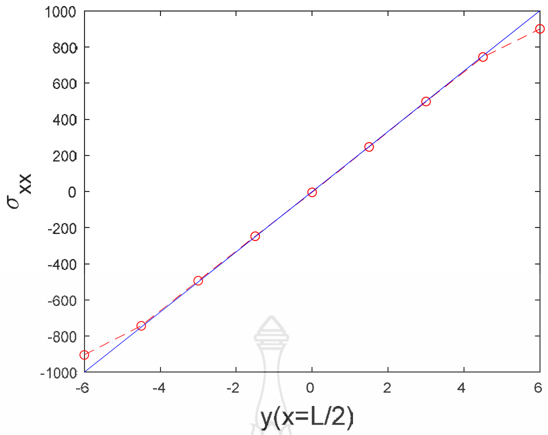
Sigma_xx_Mesh_2_alpha_1



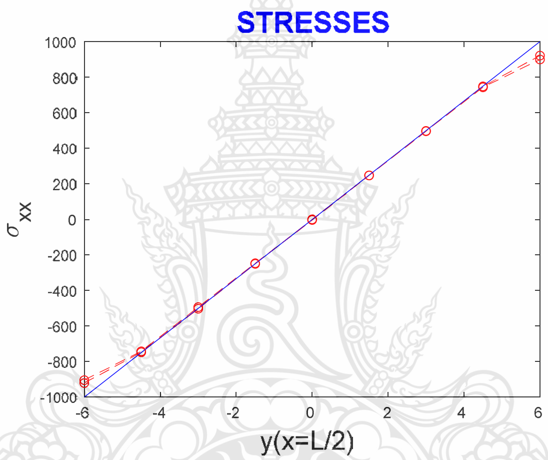
Sigma_xx_Mesh_2_alpha_2



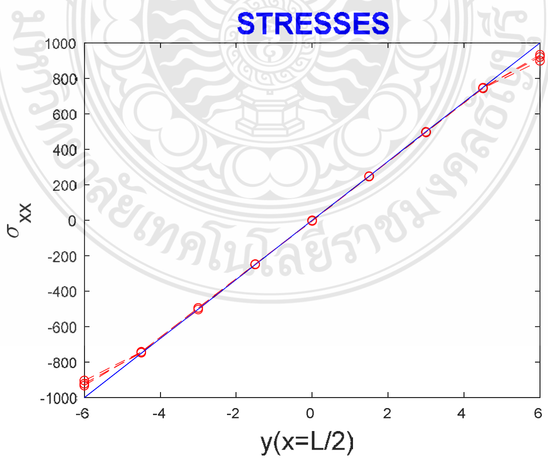
Sigma_xx_Mesh_2_alpha_3



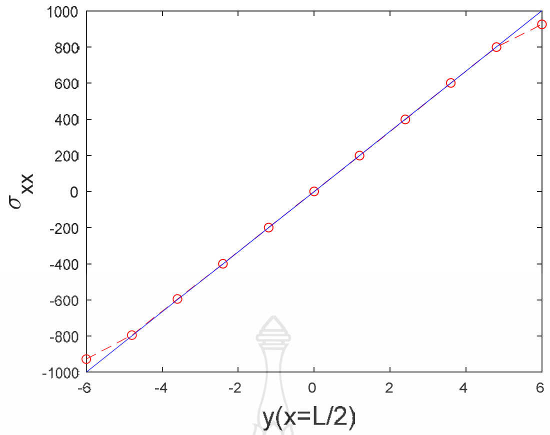
Sigma_xx_Mesh_3_alpha_1



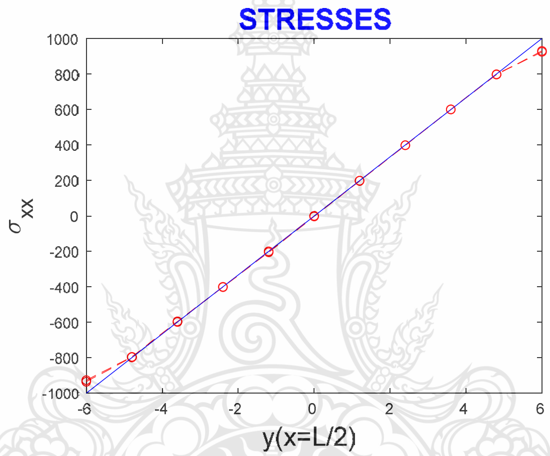
Sigma_xx_Mesh_3_alpha_2



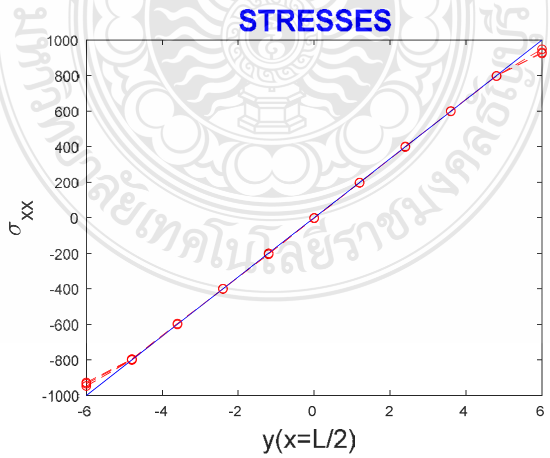
Sigma_xx_Mesh_3_alpha_3



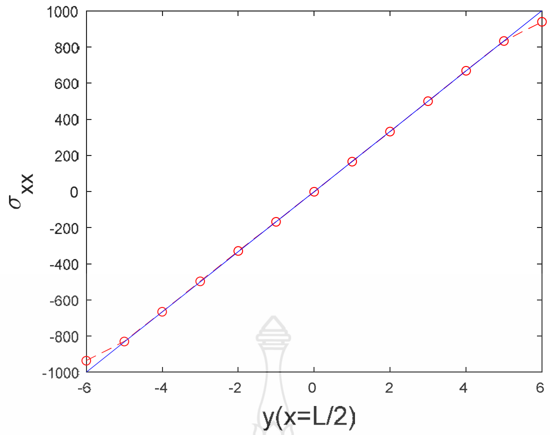
Sigma_xx_Mesh_4_alpha_1



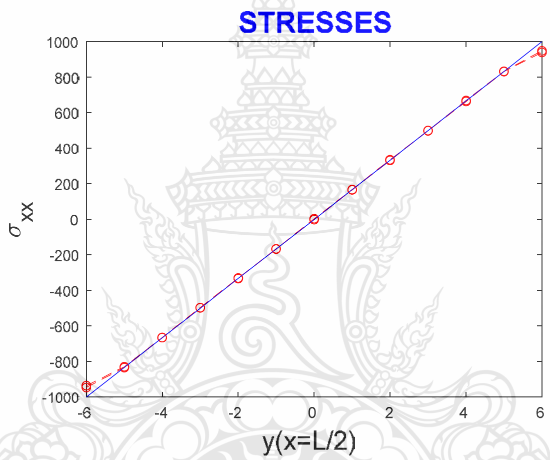
Sigma_xx_Mesh_4_alpha_2



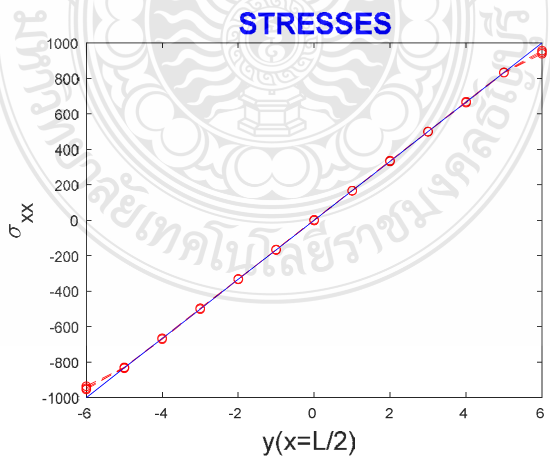
Sigma_xx_Mesh_4_alpha_3



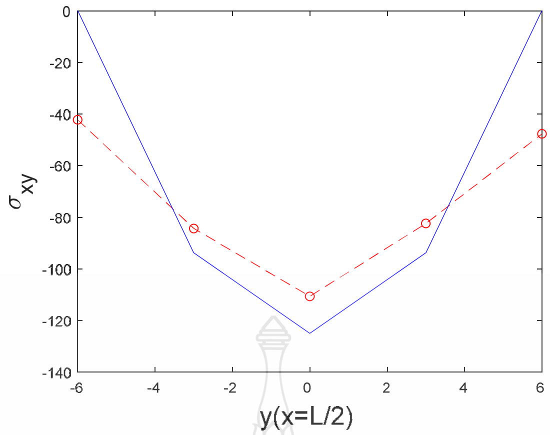
Sigma_xx_Mesh_5_alpha_1



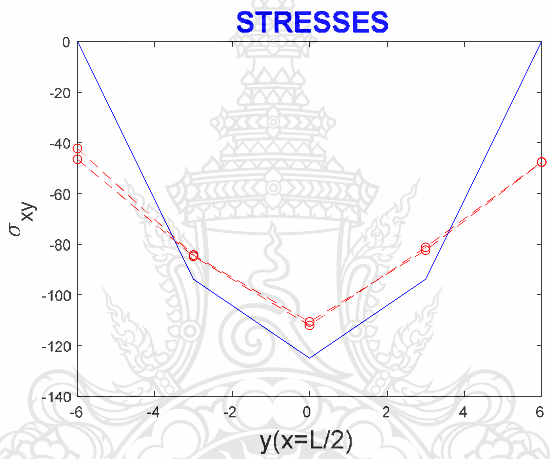
Sigma_xx_Mesh_5_alpha_2



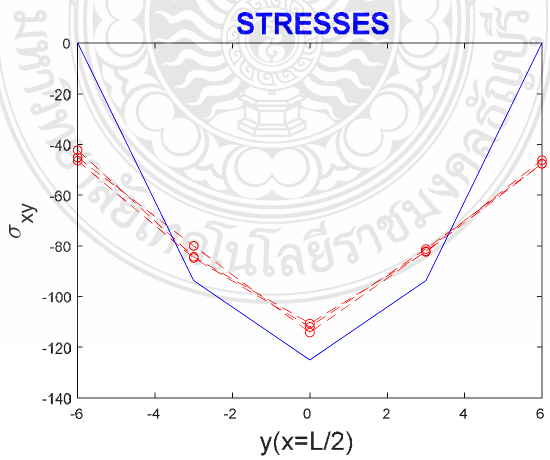
Sigma_xx_Mesh_5_alpha_3



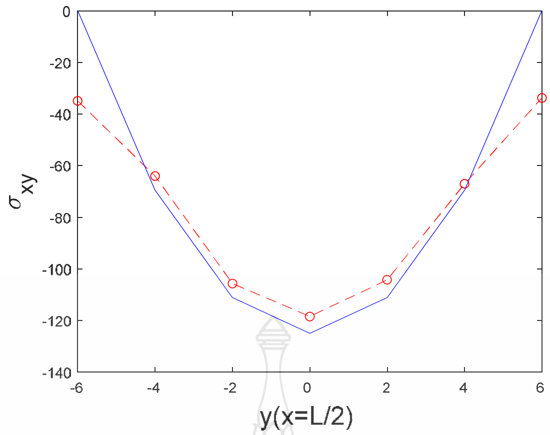
Sigma_xy_Mesh_1_alpha_1



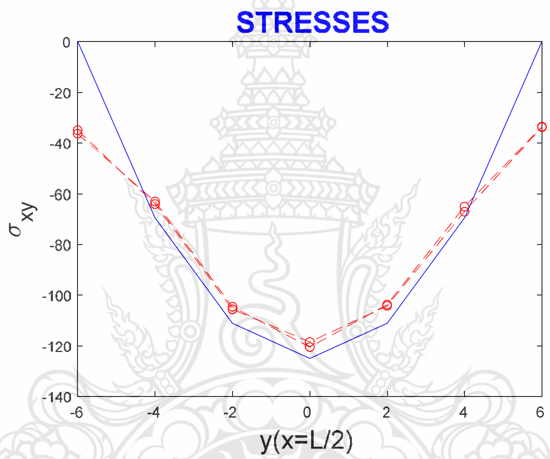
Sigma_xy_Mesh_1_alpha_2



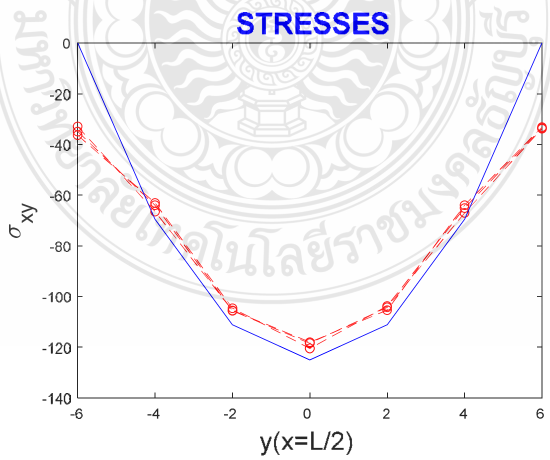
Sigma_xy_Mesh_1_alpha_3



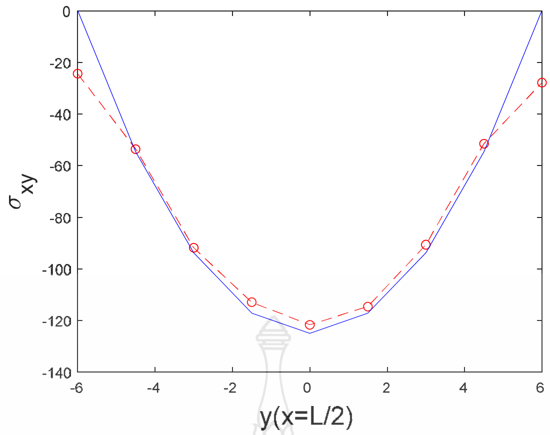
Sigma_xy_Mesh_2_alpha_1



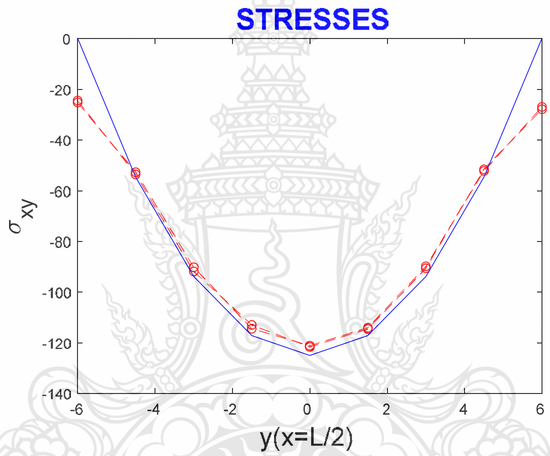
Sigma_xy_Mesh_2_alpha_2



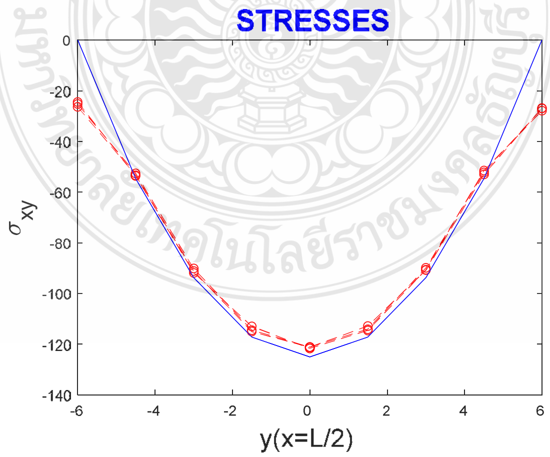
Sigma_xy_Mesh_2_alpha_3



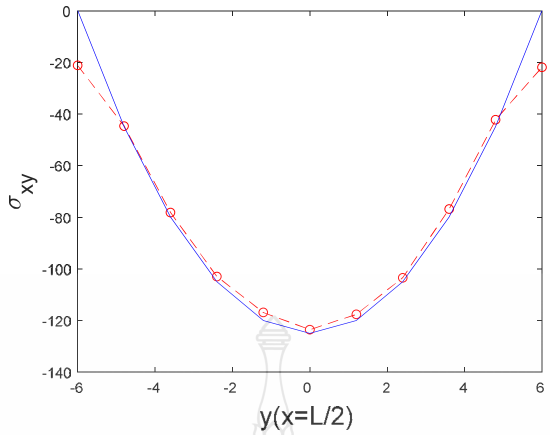
Sigma_xy_Mesh_3_alpha_1



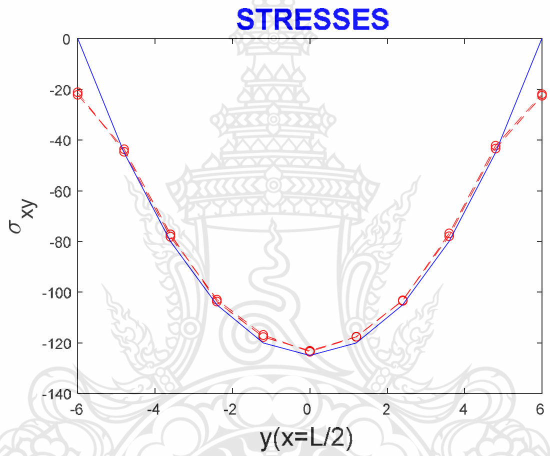
Sigma_xy_Mesh_3_alpha_2



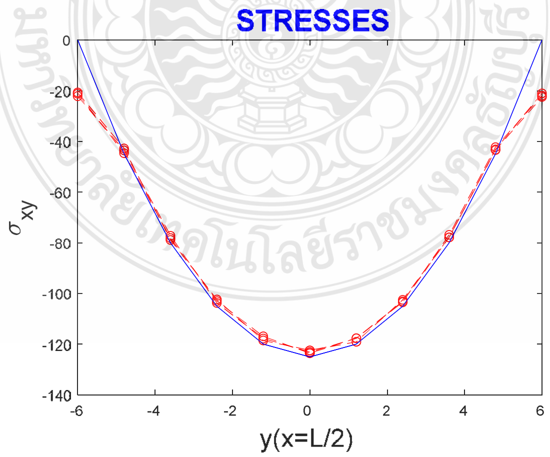
Sigma_xy_Mesh_3_alpha_3



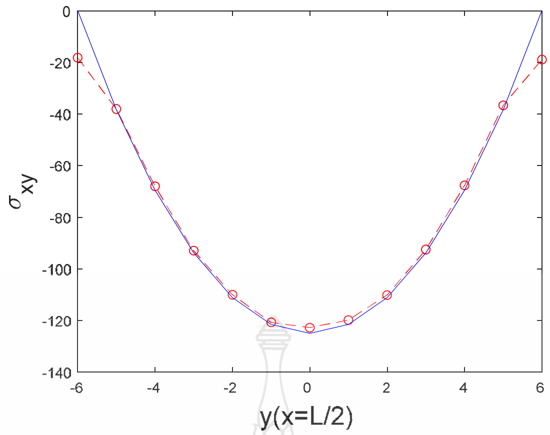
Sigma_xy_Mesh_4_alpha_1



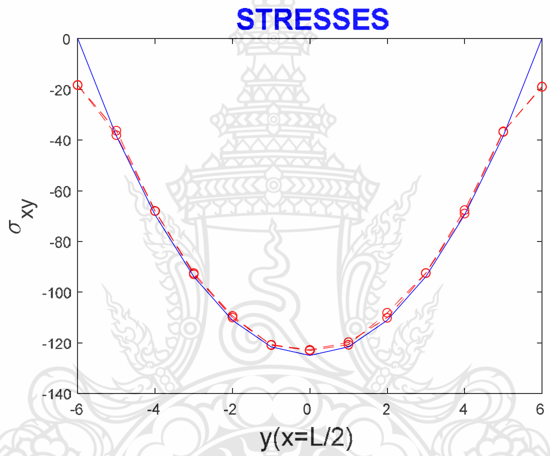
Sigma_xy_Mesh_4_alpha_2



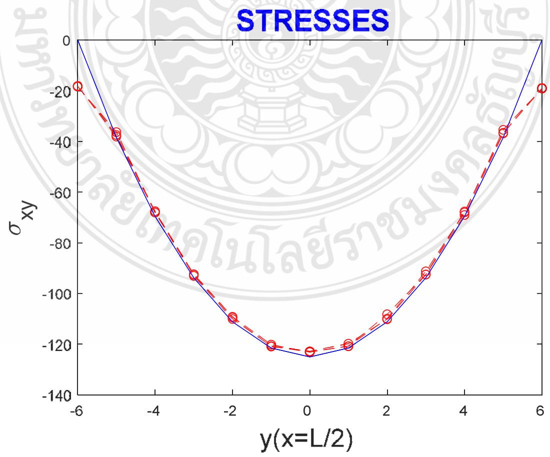
Sigma_xy_Mesh_4_alpha_3



Sigma_xy_Mesh_5_alpha_1



Sigma_xy_Mesh_5_alpha_2



Sigma_xy_Mesh_5_alpha_3

ภาคผนวก ค
วารสารตีพิมพ์เผยแพร่

ที่ R&D 002/2564

6 มกราคม 2564

เรื่อง การตอบรับลงตีพิมพ์บทความในวิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา

เรียน ผศ.ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกต

ตามที่ท่านได้จัดส่งบทความวิจัยเรื่อง **"การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย"** เพื่อพิจารณาลงตีพิมพ์ในวิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา ตามที่ทราบแล้วนั้น

กองบรรณาธิการวิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา ขอแจ้งให้ทราบว่าบทความที่เสนอมาได้รับการพิจารณาประเมินจากผู้ทรงคุณวุฒิเรียบร้อยแล้ว และให้ลงตีพิมพ์ได้ใน**วิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา ปีที่ 32 ฉบับที่ 3 เดือนกรกฎาคม-กันยายน พ.ศ. 2564**

จึงเรียนมาเพื่อโปรดทราบ

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ถาวร อมตกิตติ์)
ประธานคณะอนุกรรมการวิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา

วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ (วสท.)
The Engineering Institute of Thailand under H.M. The King's Patronage
487 ซอยรามคำแหง 39 (เทพลีลา1) ถนนรามคำแหง แขวงวังทองหลาง เขตวังทองหลาง กรุงเทพฯ 10310
โทรศัพท์ : (662) 319 2410-3, (662) 319 2807-9, (662) 184 4600-9 โทรสาร : (662) 319 2710-1 www.eit.or.th E-mail : eit@eit.or.th

วิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา
Engineering Journal of Research and Development
วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
The Engineering Institute of Thailand under H.M. The King's Patronage
ปีที่ 32 ฉบับที่ 3 กรกฎาคม-กันยายน 2564
Volume 32 Issue 3 July-September 2021
Received 13 October 2020
Revised 6 December 2020
Accepted 6 January 2021

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นใน 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ จากการสร้างเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แบบ 4 ส่วนย่อย

TWO-DIMENSIONAL PLANE STRESS ANALYSIS BY SMOOTHED FINITE ELEMENT METHOD USING 4 SMOOTHING CELLS CREATED BY AN ARBITRARY QUADRILATERAL ELEMENT

วิเชียร จันทร์ชุม[1], กำธรเกียรติ มุสิเกต[2*], บุญชัย ผึ้งไผ่งาม[3], ศุภสิทธิ์ พงศ์ศิวะสถิตย์[4]
[1] นักศึกษา, [2-4] ผู้ช่วยศาสตราจารย์, ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
*Corresponding Author, E-mail: Kamtornkiat@rmutt.ac.th

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งนำเสนอในงานครั้งนี้ ใช้หลักการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอย่อยหลาย ๆ โดเมนภายในเอลิเมนต์ โดเมนสม่ำเสมอที่ใช้นี้เป็นเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าด้านไม่เท่าที่ได้มาจากการกำหนดตำแหน่งแบบสุ่มด้วยค่า $\alpha(\alpha_x = \alpha_y)$ *ในรูปอัตราส่วนของความยาวด้าน ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากันจำนวน 3 ช่วง คือ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 สนามความเครียดสม่ำเสมอถูกสร้างขึ้นมาจากหลักการของ Gradient smoothing เพื่อกระจายความเครียดตลอดทั้งโดเมนสม่ำเสมอย่อย หลักการความสมมาตรของโดเมนสม่ำเสมอย่อยถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้าง "Semi-unit cell" เพื่อทำให้เกิดความต่อเนื่องตลอดทั่วทั้งขอบเขตที่พิจารณา ปัญหาตัวอย่างความเค้นในระนาบ 2 มิติเป็นคานยื่นปลายรับแรงกระทำซึ่งมีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลาในแนวดิ่งที่ปลายคาน เพื่อวิเคราะห์ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนตลอดความลึกของหน้าตัดที่ระยะความยาวกึ่งกลางคาน โครงตาข่ายที่ใช้มีจำนวนเท่ากับ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ ณ ระดับที่* α *และจำนวนของโครงตาข่ายมีค่ามากที่สุดนั้น ความแตกต่างของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานของการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีมีค่าเป็นร้อยละ 0.78 ความแตกต่างของความเค้นตั้งฉากมีค่าเป็นร้อยละ 0.04 และความแตกต่างของความเค้นเฉือนในระนาบมีค่าเป็นร้อยละ 1.52 ตามลำดับ*

คำสำคัญ: สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์; โดเมนสม่ำเสมอย่อย; เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า; คานยื่นปลาย; ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ; ความเค้นตั้งฉาก; ความเค้นเฉือน

ABSTRACT

The cell-based smoothed finite element analysis for this research used the arbitrary quadrilaterals which sides were randomly selected by $\alpha(\alpha_x = \alpha_y)$ *defined as ratio of its original side. The values of* α *were 0.2-0.3, 0.3-0.4 and 0.4-0.5, respectively. Smoothed strain field was created from gradient smoothing technique to distribute all strain field over entire smoothing domains. Symmetrical concept called "semi-unit cell" had been employed to establish pattern providing the continuity for the entire problem domain. Two-dimensional plane stress problem investigated was cantilever beam subjected to parabola traction at the end. In*

Wichian Janchum[1], Kamtornkiat Musiket[2*], Boonchai Phungpaingam[3] and Supasit Pongsivasatit[4]
[1] Graduate student, [2-4] Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering,
Rajamangala University of Technology Thanyaburi

order to determine the tip displacements, normal and shear stresses over cross-sectional area of benchmark problem at mid span, meshing was considered to be 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 and 48x12, respectively. The percentage differences, at both maximum value of α and mesh size, between tip displacement, normal stress, and shear stress compared to the exact solutions were 0.78, 0.04 and 1.52 respectively.

KEYWORDS: Smoothed finite element; smoothing domain sub-cell; quadrilateral element; cantilever beam; 2D plane stress problem; normal stresses; shear stress

1. บทนำ

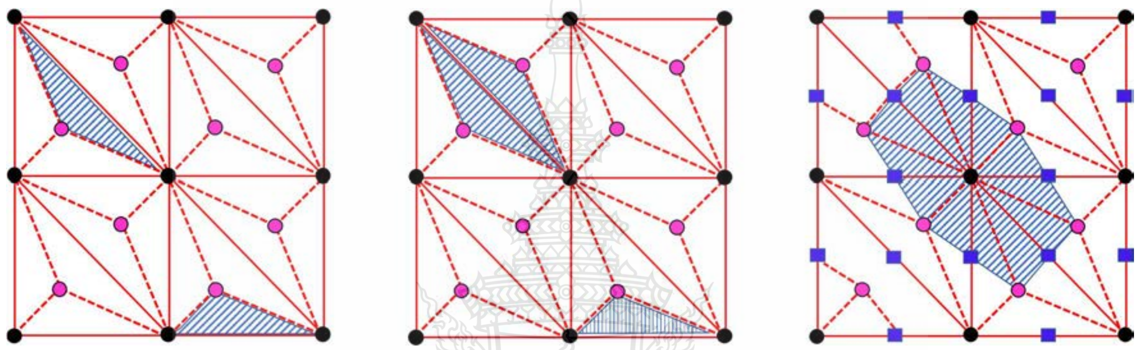
ปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไปส่วนใหญ่มักจะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknown variables) กับสิ่งที่ทราบค่าแล้ว (Constraints) ให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (Ordinary differential equations) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ในลำดับต่าง ๆ กัน บ่อยครั้งที่พบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น มีความสลับซับซ้อนอันเนื่องมาจากหลายส่วนเช่น ความซับซ้อนของรูปทรงเรขาคณิตของปัญหา ความซับซ้อนอันเนื่องมาจากความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้นระหว่างตัวแปรที่ไม่ทราบค่ากับตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว รวมถึงอนุพันธ์ลำดับสูงของสมการ เป็นต้น สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ ทำให้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ไม่สามารถแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาได้ นักวิจัยได้คิดค้นวิธีการใหม่ๆ เพื่อตอบสนองความต้องการที่จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่สลับซับซ้อนนั้นโดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical methods) เข้ามาแก้ปัญหา คำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีทางตัวเลขนี้ถึงแม้ว่าจะมีความแม่นยำเพียงพอที่จะใช้อธิบายพฤติกรรมทางกายภาพที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น แต่ก็ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่แท้จริง (Exact solution) เป็นเพียงแค่ผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate solution) เท่านั้น การลู่เข้าของผลเฉลยโดยประมาณไปสู่ผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหาทางด้านวิศวกรรมนั้น ขึ้นอยู่กับแนวคิดและกรรมวิธีของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขต่าง ๆ นั่นเอง

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมากมายได้ถูกเสนอมาตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันเพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่นับวันจะมีความสลับซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เริ่มตั้งแต่ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรน (Finite different method, FDM) วิธีไฟไนต์วอลลุม (Finite volume method, FVM) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method, FEM) วิธีเอลิเมนต์ขอบ (Boundary element method, BEM) วิธีสเปคตรัลเอลิเมนต์ (Spectral element method, SEM) วิธีเมสอิสระ (Meshless methods) วิธีเอลิเมนต์เสมือน (Virtual element method, VEM) และวิธีสเกลบาวดารีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Scaled boundary finite element method, SBFEM) เป็นต้น ในบรรดาวิธีการเหล่านี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1,2,3] ถือเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการคิดค้นพัฒนาวิธีการใหม่ๆขึ้นมา รวมทั้งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ ด้วยเช่นกัน หลักการสำคัญของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเหล่านี้คือการพยายามเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านั้นซึ่งอยู่ในรูปที่เรียกว่า “Strong form” ให้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตที่เรียกว่า “Weak form” หรือ “Integral form” ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายกว่า ถึงแม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั่วโลกอันเนื่องมาจากความสามารถในการแก้ปัญหาได้อย่างไม่จำกัด แต่ก็ยังคงมีข้อด้อยที่ต้องได้รับการปรับปรุงหลายอย่าง ไม่ว่าจะเป็นเรื่องของปัญหาสติฟเนสที่มากเกินจริง (Over stiff) ความแม่นยำเที่ยงตรงของค่าความเค้น (Stress accuracy) รวมไปถึงการบิดเบี้ยวของโครงตาข่าย (Mesh distortion) ภายใต้การเสียรูปมาก (Large deformation) เป็นต้น

การวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed finite element methods, SFEM) ได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกโดย G.R. Liu และคณะ [4] เพื่อแก้ปัญหาทั้งในส่วนของสถิตยศาสตร์และพลศาสตร์ ซึ่งเป็นการพัฒนาต่อยอดจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิม (Finite element method, FEM) หัวใจสำคัญของการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้าง

ความเครียดแบบสม่ำเสมอที่แตกต่างจากไฟไนท์เอลิเมนต์คือการสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed strain field) โดยตรงจากการเปลี่ยนตำแหน่งที่สมมุติไว้แล้วด้วยการใช้ Smoothed Galerkin weak form โดยยังคงมีคุณสมบัติของความเสถียรและการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นตรงไม่น้อยไปกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบปกติ ส่วนขั้นตอนอื่น ๆ ของการวิเคราะห์เช่นการหาสติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์ การรวมกันเพื่อสร้างสติฟเนสหลักของทั้งโดเมน การแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น ยังคงใช้ขั้นตอนเดียวกันกับที่ใช้ในขั้นตอนของวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง

การสร้างโดเมนสม่ำเสมอสำหรับปัญหาในสองมิตินั้น สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 แบบด้วยกัน คือ แบ่งโดยใช้เอลิเมนต์ (CSFEM) แบ่งโดยใช้ขอบ (ESFEM) และแบ่งโดยใช้โหนด (NSFEM) ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอแบบต่าง ๆ

วิธี SFEM สามารถแก้ปัญหาโดยให้ค่าความถูกต้องของความเค้นรวมทั้งค่าอื่น ๆ ที่สนใจสูงกว่าวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ [4] เนื่องจากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ใช้รูปแบบของ Galerkin weak form ตัวแปรความเครียดสม่ำเสมอจึงมีคุณสมบัติออโธโกนอล (Orthogonal) กับตัวแปรความเครียดในไฟไนท์เอลิเมนต์ คุณสมบัตินี้ ทำให้วิธีคำตอบที่ได้จากวิธี SFEM มีค่าเป็นขอบเขตล่างของปัญหาเมื่อเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ซึ่งถือว่าเป็นขอบเขตบน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือผลเฉลยที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ เป็นคำตอบที่อยู่ระหว่างคำตอบที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์และผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั่นเอง [5] โดเมนสม่ำเสมอซึ่งถูกสร้างบนพื้นฐานของเอลิเมนต์ที่มีหลายด้าน (Polygonal elements) นั้นถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย Dai K. และคณะ [6] โดยทางทฤษฎีแล้ว เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านนี้ สามารถเป็นได้ทั้งเอลิเมนต์ที่มีด้านยื่นเข้าไปหรือยื่นออกจากเอลิเมนต์ หาก SFEM ถูกใช้โดยมีเพียงหนึ่งเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอสำหรับแต่ละเอลเมนต์ในขอบเขตของปัญหานั้น ผลเฉลยที่ได้ จะใกล้เคียงหรือเท่ากันกับ FEM ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่ด้านร่วมกับการใช้ Reduced integration Gauss's rule [5] นอกจากนี้ Liu G. และคณะ [7] ยังได้เสนอวิธีการที่เรียกว่า αFEM ซึ่งสนามความเครียดที่สมมุติขึ้นนั้นจะได้มาจากการนำเอาค่าเฉลี่ยของความเครียดที่จุดต่อของเอลิเมนต์โดยการใช้แฟกเตอร์ที่ปรับค่าได้ α ไปรวมกับความเครียดที่คำนวณได้จาก FEM ปกติ วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบการสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักนี้ส่วนใหญ่ใช้การประมาณเชิงเส้นของโพลิโนเมียล (Linear polynomial interpolation method, LPIM) สำหรับการสร้างฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในของเอลิเมนต์ บางครั้ง อาจเลี่ยงไม่ได้ที่จะต้องใช้การประมาณแบบโพลิโนเมียลทั่วไปสำหรับการสร้างฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์และนำไปสู่คุณสมบัติซิงกูลาร์ของเมทริกซ์โมเมนต์ (Moment matrix) เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงการมีคุณสมบัติซิงกูลาร์ดังกล่าว Liu G. และคณะ [8] ได้ใช้เทคนิค

RPIM (Radial point interpolation method) สำหรับการสร้างฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์หลักรูปสามเหลี่ยม ในกรณีที่มีการทำงานร่วมกันของคอมพิวเตอร์ช่วยในงานออกแบบ (Computer aided design, CAD) และการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ที่รู้จักกันดีในชื่อ Isogeometric analysis (IGA) นั้น Hamrani A. และคณะ [9] ได้ใช้วิธี Cell-based สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ประยุกต์ใช้ร่วมกับ NURBS-based IGA เพื่อแก้ปัญหาโจทย์ใน 2 มิติและสามารถแสดงให้เห็นอย่างเด่นชัดถึงข้อดีอันหนึ่งของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นคือการไม่ต้องคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ NURBS [10] นอกจากนั้น ในวิธี Cell-based SFEM ซึ่งถือว่าเป็นวิธี SFEM ที่เป็นพื้นฐานนั้น ยังได้ถูกนำไปศึกษาอย่างแพร่หลายกับปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาของการแตกหักในสองมิติ โดยใช้ร่วมกับวิธี Extended Finite Element Method (XFEM) [11] ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นบางและแผ่นเปลือกบาง (Plate and Shell) [12] ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ (Dynamics) [13] เป็นต้น

งานวิจัยนี้ ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอ (Smoothing domains) จำนวนสี่ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักทรงเหลี่ยมสี่หน้า ความยาวแต่ละด้านของโดเมนย่อยนี้ถูกกำหนดให้เป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของเอลิเมนต์หลัก จำนวนของเอลิเมนต์หลักที่สร้างขึ้นนี้ ได้มาจากการสร้างโครงตาข่ายทรงเหลี่ยมสี่หน้าจตุรัสด้วยโปรแกรม MATLAB [14] ดังแสดงในรูปที่ 6 โดยมีอัตราส่วนของโครงตาข่ายในแนวนอนต่อแนวดิ่งเป็น 4:1 สอดคล้องกับอัตราส่วนขนาดของคานยื่นปลายที่ทำการศึกษาเพื่อป้องกันการเกิดพฤติกรรมของคานที่เรียกว่า Shear locking [15] หลักความสมมาตรของการทำให้รูปร่างของโดเมนย่อยสม่ำเสมอมีลักษณะเป็น Representative volume element (RVE) ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อให้โดเมนสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นมีความต่อเนื่องกัน

การศึกษาในครั้งนี้ได้แบ่งหัวข้อดำเนินการออกเป็นส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ สมการของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จะกล่าวไว้ในส่วนที่สอง ตามด้วยส่วนที่สามซึ่งจะกล่าวถึงขอบเขตและตัวอย่างของโครงสร้างคานยื่นปลายในสองมิติซึ่งจะใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB ในส่วนที่สี่จะกล่าวถึงผลการเปรียบเทียบของคำตอบที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์กับผลเฉลยแม่นตรง

2. ระเบียบวิธีวิจัย (Research Methodology)

2.1 สมการครอบคลุมปัญหา (Governing Equations for 2D Linear Elasticity)

พิจารณาโดเมน Ω ของรูปทรงใด ๆ ในสองมิติที่มีวัสดุเป็นเนื้อเดียวกันและมีพฤติกรรมเป็นแบบเชิงเส้น โดเมนนี้ ถูกกำหนดให้อยู่ภายในขอบเขตของ Γ โดยที่ $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t, \Gamma_u \cap \Gamma_t = 0$ เมื่อ Γ_u และ Γ_t คือ เงื่อนไขขอบแบบ Dirichlet และ Neumann ตามลำดับ สมการสมดุลของมันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์เทนเซอร์ (Tensor notations) ได้เป็น

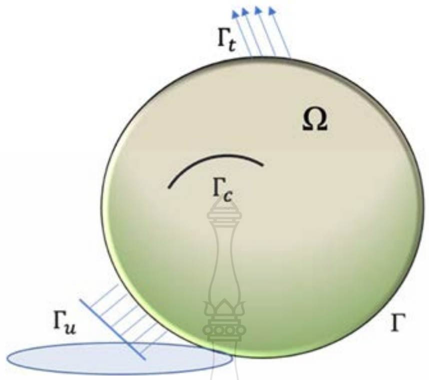
$$\nabla.\sigma + f^b = 0 \tag{1}$$

เมื่อ ∇ คือ ไดเวอร์เจนต์โอเปอเรเตอร์ (Divergence operator) σ คือ Cauchy stress tensor และ f^b คือ น้ำหนักของวัตถุ โดยที่เงื่อนไขขอบทั้งสองนั้น ถูกกำหนดว่าเป็น

$$u = \bar{u} \text{ บน } \Gamma_u \tag{2}$$

$$\sigma.n = f^t \text{ บน } \Gamma_t \tag{3}$$

เมื่อ n คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากออกจากขอบของโดเมน และ $\bar{u}$ คือการเปลี่ยนตำแหน่งที่ทราบค่าแล้วบนขอบเขต Γ_u ดังแสดงตามรูปที่ 2



รูปที่ 2 โดเมนและขอบเขตของปัญหา

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ constitutive equation หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า กฎทั่วไปของฮุค กล่าวคือ

$$\sigma = C:\varepsilon \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

ภายใต้เงื่อนไขของสมมุติฐานที่ว่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย ๆ (small-displacement theory) นั้น สมการความสอดคล้องที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง strain tensor ε_{ij} กับการเคลื่อนที่ สามารถแสดงได้เป็น

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\nabla u + \nabla u^T\right] \tag{5}$$

สมการที่ 1-3 รวมเรียกว่า Strong form ซึ่งจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่เรียกว่า Weak form เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยการสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์ต่อไป การเปลี่ยนรูปดังกล่าวนี้ สามารถทำได้สองวิธีด้วยกันคือทั้งการใช้วิธีหลักของพลังงาน (Energy method) หรือวิธีการถ่วงเศษน้ำหนัก (Weighted residual methods) ตกค้างขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติสำหรับวัสดุที่เป็น Isotropic linear elastic material นั้น การสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์นิยมเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์เพื่อความสะดวกได้ดังนี้

$$\left[\sigma\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} , \qquad \left[\varepsilon\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \tag{6}$$

และนิยมเขียนให้อยู่ในรูปของ Voigt notation เพื่อความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ

$$\sigma = \left[\sigma_{xx}\, \sigma_{yy}\, \sigma_{xy} \right]^T, \qquad \varepsilon = \left[\varepsilon_{xx}\, \varepsilon_{yy}\, \varepsilon_{xy} \right]^T \tag{7}$$

ในขณะที่เทนเซอร์ C สำหรับปัญหาในความเค้นในสองมิติลดรูปลงเป็น

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

และไดเวอร์เจนต์โอเปอเรเตอร์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสองมิติได้เป็น

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{9}$$

หากพิจารณาการสร้างสมการไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการใช้วิธีเศษถ่วงน้ำหนักตกค้างโดยคูณสมการที่ 1 ด้วยฟังก์ชันทดสอบ V แล้วทำการอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาจะได้ว่า

$$\int_\Omega V^T L^T \sigma \, d\Omega + \int_\Omega V^T f^b \, d\Omega = 0 \tag{10}$$

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) ร่วมกับเงื่อนไขขอบตามสมการที่ 2 และ 3 จะได้ว่า

$$\delta V^T \left[\int_\Omega \left(B^T D B \right) u \, d\Omega - \int_\Omega f^b \, d\Omega - \int_\Gamma f^t \, d\Gamma \right] = 0 \tag{11}$$

หากต้องการให้สมการที่ 11 เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันทดสอบใด ๆ ค่าภายในวงเล็บต้องมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกไฟไนท์เอลิเมนต์เล็ก ๆ ที่ถูกแบ่งจากโดเมนของปัญหานั่นเอง ดังนั้น สมการไฟไนท์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ สามารถแสดงได้เป็น

$$Ku = F \tag{12}$$

โดยที่

$$F = \sum_e F^e = \sum_e \left(\int_\Omega N^T f^b \, d\Omega + \int_\Gamma N^T f^t \, d\Gamma \right) \tag{13}$$

เมื่อ K, F, u, N คือ สติฟเนสเมทริกซ์ เวคเตอร์ของแรงกระทำที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ การเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ และฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในของเอลิเมนต์ตามลำดับในระบบ โคออร์ดิเนตหลัก *(*Global system*)*

2.2 การสร้างสนามความเครียดสม่ำเสมอ (Smoothed Strain Field Construction)

ลำดับขั้นตอนการทำงานของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น มีความคล้ายคลึงกับวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์แทบทุกขั้นตอน เริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่มีหลายด้าน (N-sided polygonal element) ทำการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอโดยอาศัยเทคนิคของ Strain/gradient smoothing บนโดเมนสม่ำเสมอที่อยู่ภายในทุก ๆ เอลิเมนต์ ขั้นตอนนี้เป็นเพียงขั้นตอนเดียวที่แตกต่างจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ ขั้นตอนอื่น ๆ นอกเหนือจากนี้ เช่น การสร้างสมการ Weak form การกำหนดเงื่อนไขขอบ การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ย่อยมาประกอบกันเข้าเป็นสมการในระบบหลัก การแก้สมการในระบบหลักเพื่อหาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง รวมไปถึงการคำนวณกลับมาเพื่อหาค่าความเค้น ความเครียดและปริมาณอื่น ๆ ที่ต้องการ ล้วนแล้วแต่ดำเนินการไปในทิศทางเดียวกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์โดย สนามความเครียดสม่ำเสมอที่ต้องการนี้ได้มาจากการคำนวณโดยใช้ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดที่อยู่บนด้านของโดเมนสม่ำเสมอจึงทำให้สามารถใช้กับเอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่าสี่ด้านซึ่งเป็นข้อดีที่เหนือกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ เนื่องจากการประมาณภายในของการเคลื่อนที่ของจุดต่อที่อยู่บนด้านของเอลิเมนต์ทุกเอลิเมนต์ภายในโดเมนสม่ำเสมอเป็นแบบเชิงเส้น จึงส่งผลให้มีความต่อเนื่องของการเคลื่อนที่ของทั้งโดเมนสำหรับปัญหานี้

วิธีการที่เรียกว่า Strain/gradient smoothing ถือว่าเป็นวิธีที่ง่ายและสะดวกที่สุดสำหรับการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ ซึ่งขึ้นอยู่กับสมมุติฐานที่ว่าความเครียด ณ ตำแหน่งใด ๆ ภายในโดเมนสม่ำเสมอได้มาจากการทำให้ความเครียดแบบเดิมที่ใช้ในวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ (Compatible strain field) เกิดการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนสม่ำเสมอที่กำลังสนใจนั้น นอกจากนี้ ยังสมมุติว่า ความเครียดสม่ำเสมอภายในโดเมนสม่ำเสมอที่ได้นั้นมีค่าคงที่ [5]

ในกรณีที่ความเครียดแบบเดิมที่ได้จากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ที่เรียกว่า Compatible strain field นี้ สามารถหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเคลื่อนที่ (Strain-displacement relation) และกำหนดให้เป็น ε แล้วนั้น ความเครียดแบบสม่ำเสมอ $\overline{\varepsilon}$ ณ ตำแหน่ง x_i ใด ๆ สามารถหาค่าได้จากสมการที่ (14) [16]

$$\overline{\varepsilon}(x_i) = \int_\Omega \varepsilon(x) W(x_i - x) d\Omega = \int_\Omega L\bar{u}(x) W(x_i - x) d\Omega \tag{14}$$

โดยที่ $W(x_i - x)$ คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักของตำแหน่งที่กำลังสนใจโดยที่ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักนี้ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ใน Chen JS. และคณะ [17] เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จะกำหนดให้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักนี้อยู่ในรูปของ Heaviside step function ดังนี้คือ

$$W(x_i - x) = \begin{cases} \dfrac{1}{A_i^S}, & x \in \Omega_i^S \\ 0, & x \notin \Omega_i^S \end{cases} \tag{15}$$

เมื่อ $A_i^S = \int_{\Omega_i^S} d\Omega$ คือพื้นที่ของโดเมนสม่ำเสมอ ในกรณีที่ความเครียดแบบเดิมสามารถหาได้ง่าย ก็สามารถคำนวณหาความเครียดแบบสม่ำเสมอได้โดยตรงซึ่งส่งผลให้ความเครียดแบบสม่ำเสมอสำหรับวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้คงที่ภายในโดเมนสม่ำเสมอที่กำหนดไว้นั่นเอง ในกรณีที่การหาค่าของความเครียดแบบดั้งเดิมสามารถทำได้ยาก การเปลี่ยนจากความเครียดมาเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งแทนแล้วใช้ทฤษฎี *Green-Gauss* จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวได้เป็นอย่างดี กล่าวคือ

$$\bar{\varepsilon}(x_i) = \int_\Omega L\,\bar{u}(x)W(x_i - x)d\Omega = \frac{1}{A_i^S}\int_\Gamma L_n(x)\bar{u}(x)d\Gamma \tag{16}$$

เมื่อ $L_n(x)$ คือเมทริกซ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากออกจากด้านของ Γ

หากแทนค่าการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของเอลิเมนต์ในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ $\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i \bar{u}_i(x)$ ลงในสมการที่ 16 แล้ว ทำการจัดรูปสมการเสียใหม่จะได้

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{B}_1(x)\ \bar{B}_2(x)\cdots\bar{B}_n(x)\right]\bar{d} = \bar{B}(x)\bar{d} \tag{17}$$

โดยที่ $\bar{B}$ คือเมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก *(*Global smoothed strain-displacement matrix*)* ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\bar{B}_I(x) = \frac{1}{A_i^S}\int_\Gamma L_n(x)N_I(x)\,d\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{b}_x & 0 \\ 0 & \bar{b}_y \\ \bar{b}_y & \bar{b}_x \end{bmatrix} \tag{18}$$

เมื่อ

$$\bar{b}_i = \frac{1}{A_i^S}\int_\Gamma n_i(x)N_I(x)\,d\Gamma,\ i = x,y \text{ และ } I = 1,2,\cdots N_n \tag{19}$$

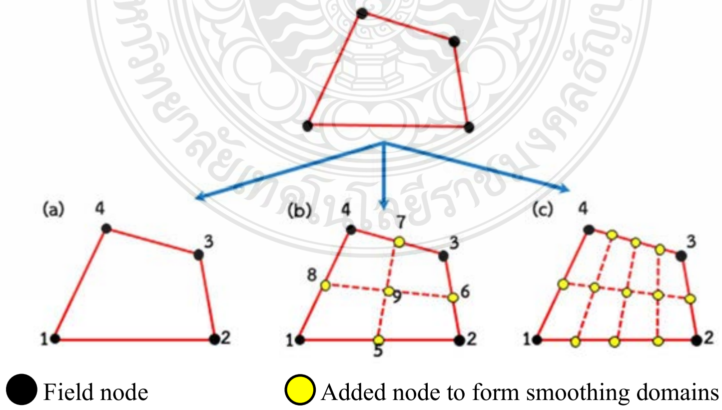
สมการที่ 19 เป็นสมการอินทิเกรตในหนึ่งมิติของขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอนั่นเอง เช่นเดียวกันกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ สามารถใช้กฎการอินทิเกรตของเกาส์ *(Gauss quadrature rules)* เข้ามาช่วยได้ หากการเปลี่ยนตำแหน่งที่ใช้บนแต่ละด้านของเอลิเมนต์นั้นมีการแปรผันแบบเชิงเส้น ตำแหน่งของเกาส์เพียงแค่หนึ่งจุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางด้านก็เพียงพอที่จะให้ค่าการประมาณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลมีความถูกต้องถึงกำลัง $2n^G - 1 = 1$ เมื่อ n^G จำนวนจุดของเกาส์ ดังนั้น เครื่องหมายอินทิเกรตในสมการที่ 19 สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเครื่องหมายผลรวมได้เป็น

$$\overline{b}_i = \frac{1}{A_i^S} \sum_{j=1}^{n_\Gamma^S} n_{i,j}(x) N_I(x_j^G) L_j, \; i = x, y \tag{20}$$

เมื่อ n_Γ^S คือจำนวนด้านของเซลล์ที่อยู่ภายในโดเมนสม่ำเสมอและ x_j^G คือตำแหน่งของจุดเกาส์ ณ กึ่งกลางด้านนั้น ๆ $n_{i,j}$ คือเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากด้านของเซลล์และ L_j คือความยาวด้านของเซลล์นั้นตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าในวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งเป็นเมทริกซ์สำคัญสำหรับการคำนวณหาสติฟเนสเมทริกซ์ต่อไปนั้น ไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ ทำให้สามารถทำงานได้เร็วกว่าวิธีแบบเดิมมากสำหรับปัญหาที่มีจำนวนเอลิเมนต์มาก

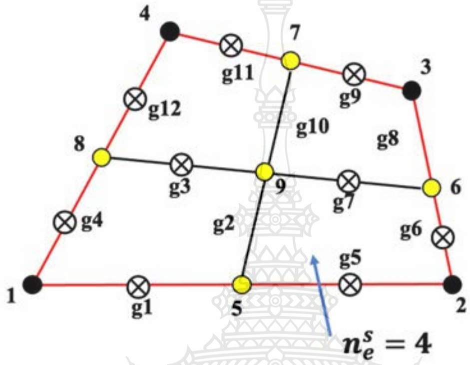
2.3 โดเมนสม่ำเสมอโดยการแบ่งเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Cell-based Quadrilateral Smoothing Domain)

งานวิจัยในครั้งนี้ ใช้การแบ่งโดเมนใหญ่ของทั้งปัญหาออกเป็นโดเมนย่อย ๆ โดยใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้า (Quadrilateral element) เป็นเอลิเมนต์หลักดังแสดงในรูปที่ 3 เอลิเมนต์หลักดังกล่าว จะถูกนำมาแบ่งออกเป็นส่วนย่อยที่เรียกว่า โดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain, SD) ด้วยการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเช่นกัน จำนวนน้อยที่สุดของโดเมนสม่ำเสมอสำหรับปัญหาของของแข็งใน 2 มิติ ซึ่งแนะนำโดย [18] มีค่าเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมดของปัญหา การแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอนี้ สามารถทำได้โดยทำการลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างกึ่งกลางด้านทั้งสองที่อยู่ตรงข้ามกันดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงการแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอจากเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม
(ซ้าย) 1 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ (กลาง) 4 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ (ขวา) 8 โดเมนย่อยสม่ำเสมอ

เนื่องจากการเคลื่อนที่ปลายจุดต่อของด้านที่อยู่บนโดเมนสม่ำเสมอนี้ใช้การประมาณเป็นแบบเชิงเส้น เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งแบบสม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (สมการที่ 18) สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง *(*Shape function*)* ของเกาส์ ณ จุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียวโดยไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ของมัน ในทางปฏิบัติ นิยมใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับการหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างดังกล่าว ในรูปที่ 4 วงกลมทึบ 1-2-3-4 แสดงตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์หลักทรงเหลี่ยมสี่หน้า วงกลม 5-6-7-8-9 แสดงตำแหน่งของจุดต่อของโดเมนย่อยสม่ำเสมอสี่โดเมน วงกลมกากบาท g1-g12 แสดงตำแหน่งของจุดเกาส์ทั้งหมด



รูปที่ 4 ตำแหน่งของจุดเกาส์ ณ กึ่งกลางด้านของโดเมนสม่ำเสมอย่อย

2.4 สมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

จากหลักการของวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่กล่าวมาเบื้องต้น สามารถเขียนเป็นสมการสุดท้ายได้ว่า

$$\bar{K}^{SFEM}\bar{u} = \bar{F} \tag{21}$$

โดยใช้สัญลักษณ์บาร์ด้านบนเพื่อแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกับสมการไฟไนท์เอลิเมนต์นั่นเอง เพราะฉะนั้น สติฟเนสเมทริกซ์สม่ำเสมอในระบบโคออร์ดิเนตหลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของสติฟเนสสม่ำเสมอย่อยได้เป็น

$$\bar{K}^{SFEM} = \sum \bar{B}^T D\bar{B}A_k^s \tag{22}$$

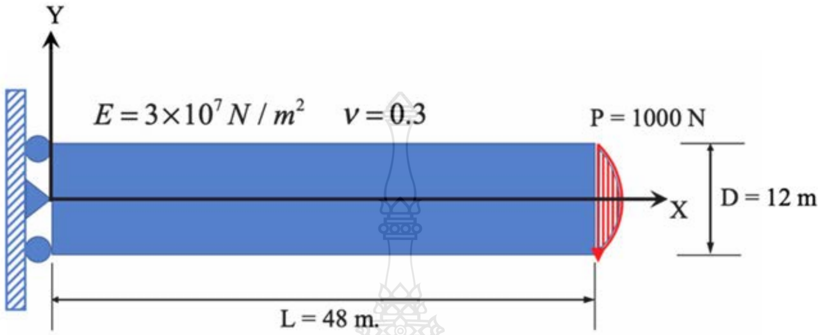
ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการที่ 21 เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งปลายจุดต่อที่ต้องการได้

3. การจำลองเชิงตัวเลข (Numerical Simulations)

3.1 การเปรียบเทียบผลเชิงตัวเลข

การศึกษาวิจัยนี้ ดำเนินการศึกษาโดยทำการปรับปรุงโปรแกรมที่ถูกเขียนขึ้นด้วย MATLAB สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติโดย Liu G. และคณะ [5] ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ โดเมนย่อยสม่ำเสมอที่ใช้เป็นแบบความยาวด้านไม่คงที่แปรเปลี่ยนเป็นอัตราส่วน α เทียบกับความยาวเดิมของด้านนั้น ๆ ปัญหาที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของอัลกอริทึมและผลการวิเคราะห์เป็นตัวอย่างคานยื่นปลายที่มีความยาว 48 เมตร ความลึก 12 เมตร และความหนา 1 เมตรเพื่อให้เป็นปัญหาความเค้นใน

ระนาบแบบสองมิติ ปลายคานด้านหนึ่งมีแรงกระทำแบบไม่สม่ำเสมอเป็นรูปพาราโบลา ที่ด้านปลายยื่นด้านขวามือเท่ากับ 1000 นิวตัน ปลายคานด้านซ้ายมือมีสภาพเป็นแบบยึดหมุน (Hinge support) ที่ระยะกึ่งกลางของความลึกโดยที่ขอบด้านบนและด้านล่างมีสภาพเป็นฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวดิ่ง (Roller support) ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 คานยื่นปลายสำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

ผลเฉลยแม่นตรงของคานยื่นปลายดังกล่าวซึ่งได้แก่ การเคลื่อนที่ทั้งสองแกน สามารถแสดงในรูปสมการได้เป็น [19]

$$u_x(x,y) = \frac{Py}{6EI}\left[(6L-3x)x + (2+\nu)(y^2 - \frac{D^2}{4})\right] \tag{23}$$

$$u_y(x,y) = -\frac{P}{6EI}\left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu)\frac{xD^2}{4} + (3L-x)x^2\right] \tag{24}$$

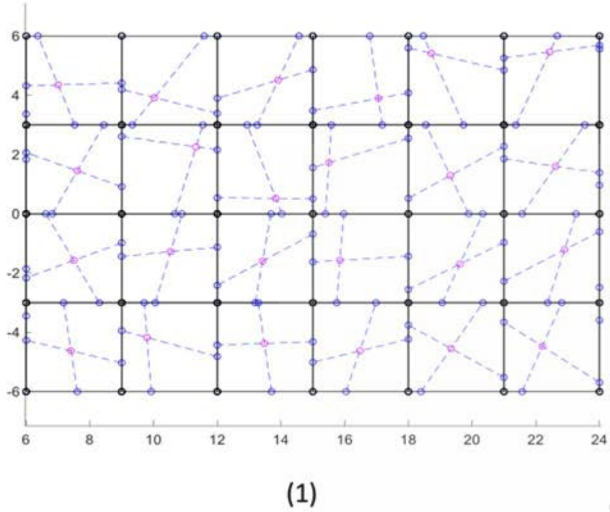
เมื่อ $I = D^3/12$ คือโมเมนต์ความเฉื่อยของคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนาเท่ากับหนึ่งหน่วย ความเค้นในระนาบที่คำนวณได้จากค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 25

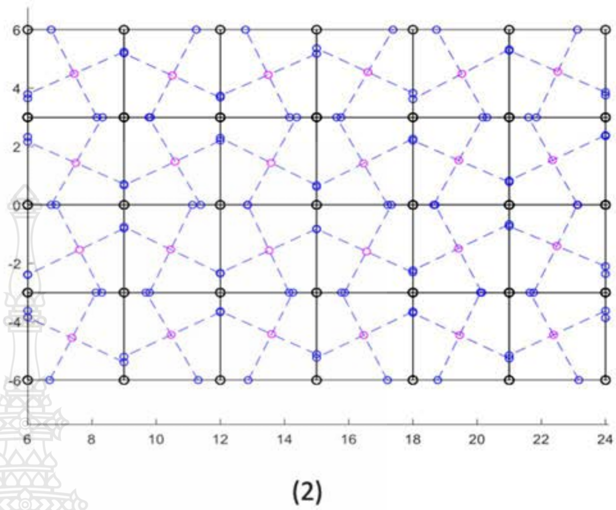
$$\sigma_{xx}(x,y) = \frac{Py}{I}(L-x),\ \sigma_{yy}(x,y) = 0,\ \sigma_{xy}(x,y) = -\frac{P}{2I}(\frac{D^2}{4} - y^2) \tag{25}$$

3.1 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย

การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยในแต่ละเอเมนต์นั้น เริ่มต้นโดยการสุ่มตำแหน่งบนด้านทั้งสี่ด้านสอดคล้องกับค่า α ที่กำหนดไว้$(\alpha_x = \alpha_y)$ ทำการลากเส้นเชื่อมจากตำแหน่งที่ทำการสุ่มไปยังด้านตรงข้ามทำให้สามารถแบ่งเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวนสี่โดเมนดังรูปที่ 6 (ซ้าย) จากรูปดังกล่าวพบว่า การสร้างโดเมนแบบอิสระนี้ ลักษณะรูปร่างของ smoothing domain ที่ได้จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีขนาดและรูปร่างแตกต่างกันอย่างไม่มีรูปแบบใด ๆ ซึ่ง

สังเกตเห็นได้ชัดเจนว่าพื้นที่ที่เกี่ยวข้องกับจุดต่อของเอลิเมนต์หลักจะมีความแปรผันมาก ทำให้ผลของการคำนวณมีค่าที่ไม่แน่นอน ควบคุมไม่ได้และมีโอกาสผิดพลาดสูง





รูปที่ 6 การสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย แบบอิสระ (ซ้าย) และแบบ Semi-unit cell (ขวา)

เพื่อขจัดความไม่แน่นอนดังกล่าวออกไปจากการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อย หลักการของ Unit cell จะถูกนำมาประยุกต์ใช้ โดยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยในลักษณะที่ทำให้การกระจายตัวมีความสม่ำเสมอต่อเนื่องกันไปทั่วทั้งโดเมนของปัญหาที่กำลังสนใจ การทำเช่นนี้ ทำให้ได้รูปแบบของ Smoothing domain ในลักษณะที่เรียกว่า Semi-unit cell ดังแสดงในรูปที่ 6 (ขวา)

4. ผลและการวิเคราะห์ผล (Results and Discussions)

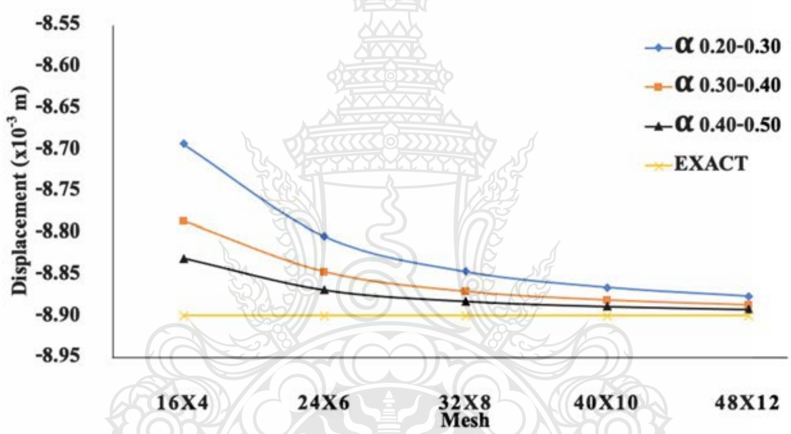
ส่วนนี้จะกล่าวถึงผลของการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติโดยใช้คานยื่นปลายเป็นตัวอย่างสำหรับคำนวณค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ความเค้นตั้งฉาก (Normal stresses) และความเค้นเฉือน (Shear stresses) เพื่อเปรียบเทียบค่าจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ดังกล่าวกับค่าที่ได้ทางทฤษฎี (Exact solution) โดยมีการแบ่งจำนวนของเอลิเมนต์ทางแนวนอนต่อแนวตั้งออกเป็น 5 ชุด คือ 16x4, 24x6, 32x8, 40x10 และ 48x12 ตามลำดับ โดยในแต่ละชุดทำการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain) แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จำนวนสี่ส่วนย่อย อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักทุกเอลิเมนต์ การระบุตำแหน่งที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์ย่อยเพื่อสร้างโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain) บนความยาวด้านของแต่ละเอลิเมนต์ ทำได้โดยกำหนดแบบทำการสุ่มในช่วงอัตราส่วน α คือ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ของความยาวด้านของเอลิเมนต์ ตามลำดับ ผลการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

4.1 การเคลื่อนที่ของปลายคาน (Beam Tip Displacement)

ผลการวิเคราะห์ระยะการเคลื่อนตัวที่ปลายคานปัญหาตัวอย่างโดยวิธี CSFEM แบบ การใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอจำนวนสี่ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้า แสดงไว้ในตารางที่ 1 จากตารางดังกล่าวพบว่า ค่าผลเฉลยจากทฤษฎีมีค่าเท่ากับ 8.90 ในขณะที่ผลการคำนวณจากวิธี CSFEM ได้คำตอบที่แปรผันตาม อัตราส่วนของ α และจำนวนของการแบ่งเอลิเมนต์ กล่าวคือ ผลการคำนวณจากวิธี CSFEM ลู่เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎีเมื่ออัตราส่วนของ α เพิ่มขึ้น ขณะที่จำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่มากขึ้นทำให้ผลการคำนวณจากวิธี CSFEM เข้าใกล้ค่าผลเฉลยจากทฤษฎีมากขึ้นเช่นเดียวกัน

ตารางที่ 1 การเคลื่อนที่ของปลายคาน (Tip displacement (x10^{-3} m))

MESH	α			Exact solution
	0.20-0.30	0.30-0.40	0.40-0.50	
16x4	-8.6932	-8.7866	-8.8308	-8.9000
24x6	-8.8044	-8.8471	-8.8690	-8.9000
32x8	-8.8469	-8.8708	-8.8824	-8.9000
40x10	-8.8658	-8.8810	-8.8887	-8.9000
48x12	-8.8763	-8.8869	-8.8922	-8.9000



รูปที่ 7 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานเทียบกับค่าทางทฤษฎี

รูปที่ 7 แสดงผลของการเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งที่ได้จากตารางที่ 1 กับค่าทางทฤษฎี ค่าร้อยละของความแตกต่าง เมื่อพิจารณาจากจำนวนเอลิเมนต์ที่มีความหยาบมากสุดคือขนาด 16x4 จะพบว่า ที่อัตราส่วน α เท่ากับ 0.2-0.3 นั้น ผลการคำนวณมีค่าแตกต่างจากค่าทางทฤษฎีเท่ากับ 2.32 ในขณะที่ช่วงอัตราส่วน α เท่ากับ 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ผลการคำนวณค่าการเคลื่อนที่ปลายคานจากวิธี CS-FEM มีค่าแตกต่างจากค่าทางทฤษฎีลดลงเป็นร้อยละ 1.27 และ 0.78 ตามลำดับ ในขณะที่เมื่อมีการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นเป็น 48x12 จะมีค่าความแตกต่างจากค่าทางทฤษฎีเท่ากับร้อยละ0.33, 0.14 และ 0.11 ที่ α เท่ากับ 0.2-0.3, 0.3-0.4 และ 0.4-0.5 ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่าค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งนี้ จะลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีมากขึ้นเมื่อมีการเพิ่มขึ้นของทั้งอัตราส่วน α และจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ที่มากขึ้น

4.2 ความเค้นตั้งฉาก (Normal stresses)

การวิเคราะห์เพื่อศึกษาค่าความเค้นตั้งฉากของคานปัญหาตัวอย่างนั้น เนื่องจาก $\sigma_{yy}(x,y)=0$ จึงใช้เพียงค่าของ $\sigma_{xx}(x,y)$ สำหรับทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากวิธี CSFEM กับผลลัพธ์ทางทฤษฎีของคานตัวอย่างที่ระยะกึ่งกลางคาน L/2 โดยใช้ค่าความเค้นตั้งฉากทุกค่าที่คำนวณได้จากผิวบนสุด (+Y) ถึงผิวล่างสุด (-Y) การแบ่งจำนวนของเอลิเมนต์และค่าของ α ใช้ในลักษณะเดียวกันกับที่วิเคราะห์ในหัวข้อ 4.1 นั่นเอง

ผลการวิเคราะห์ค่าความเค้นตั้งฉากของคานปัญหาตัวอย่างโดยวิธี CSFEM แบบการใช้เอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าเพื่อสร้างโดเมนย่อยสม่ำเสมอจำนวนสี่ส่วนที่อยู่ภายในเอลิเมนต์หลักรูปทรงเหลี่ยมสี่หน้ากับค่าที่ได้จากทฤษฎีจะถูกนำมาเปรียบเทียบเหมือนในหัวข้อที่ผ่านมา จากผลการเปรียบเทียบของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน พบว่า มีแนวโน้มลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีเมื่อมีการเพิ่มค่าของจำนวนเอลิเมนต์หรือค่าของ α ค่าใดค่าหนึ่งหรือรวมกันทั้งสองแบบ ในกรณีความเค้นตั้งฉากของหน้าตัด ณ กึ่งกลางคานก็เช่นเดียวกัน ค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ มีค่าลู่เข้าสู่ค่าทางทฤษฎีเมื่อมีการเพิ่มค่าของจำนวนเอลิเมนต์หรือค่าของ α ค่าใดค่าหนึ่งหรือรวมกันทั้งสองแบบต่างกันตรงที่ตำแหน่งของจุดต่อหรือระยะในแนวดิ่งของหน้าตัดจะมีค่าโคออร์ดิเนตไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแบ่ง ค่าความเค้นตั้งฉากของหน้าตัด ณ กึ่งกลางคานที่ระยะกึ่งกลางความยาวคานซึ่งนำมาพิจารณา แสดงได้ดังตารางที่ 2 และรูปที่ 8

ตารางที่ 2 ค่าความเค้นตั้งฉากสำหรับโครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ

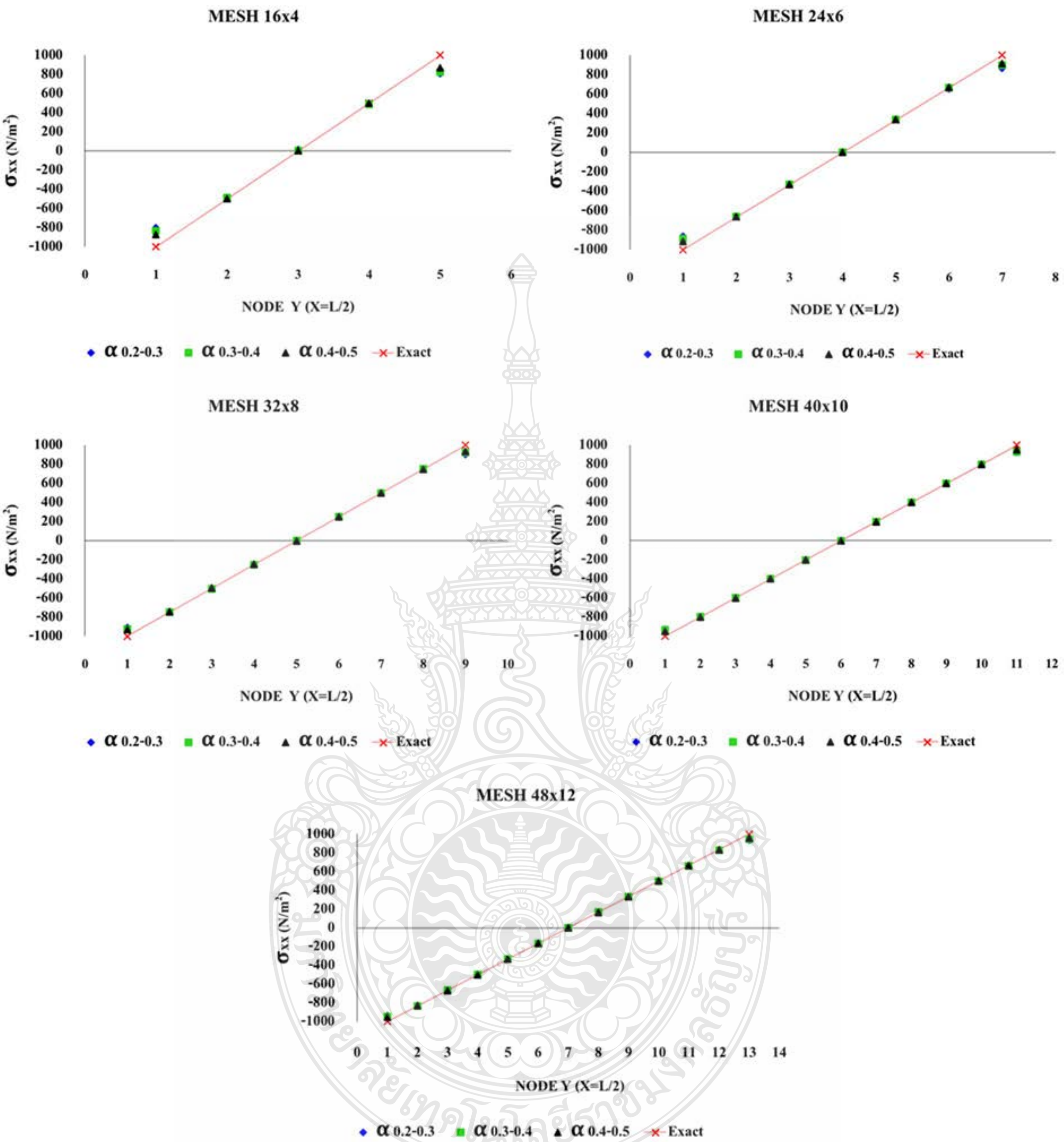
Mesh 16x4					
α	node				
	1	2	3	4	5
0.2-0.3	-800.63	-488.30	14.81	494.49	809.24
0.3-0.4	-831.51	-486.43	3.43	491.61	825.44
0.4-0.5	-872.25	-497.31	2.57	498.13	868.55
Exact	-1000.00	-500.00	0.00	500.00	1000.00

Mesh 24x6							
α	node						
	1	2	3	4	5	6	7
0.2-0.3	-861.20	-660.42	-333.95	2.14	336.43	656.05	863.80
0.3-0.4	-887.21	-661.93	-328.06	2.25	338.60	664.86	895.50
0.4-0.5	-913.50	-661.36	-331.26	0.66	337.26	669.03	913.73
Exact	-1000.00	-666.67	-333.33	0.00	333.33	666.67	1000.00

Mesh 32x8									
α	node								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-904.71	-742.85	-493.96	-247.71	-4.04	247.49	497.99	744.32	899.76
0.3-0.4	-921.39	-747.83	-503.68	-249.95	-0.20	247.89	496.59	749.38	922.37
0.4-0.5	-932.15	-742.49	-495.30	-248.04	-0.89	248.69	499.05	745.37	934.12
Exact	-1000.00	-750.00	-500.00	-250.00	0.00	250.00	500.00	750.00	1000.00

Mesh 40x10											
α	node										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.2-0.3	-927.78	-795.50	-595.20	-400.16	-199.62	-0.12	198.27	398.62	600.99	798.93	925.70
0.3-0.4	-935.43	-798.04	-598.08	-401.36	-205.06	-2.90	197.82	398.14	600.76	797.44	931.58
0.4-0.5	-948.04	-801.16	-600.85	-398.81	-200.92	-2.75	197.26	401.59	598.85	798.36	949.52
Exact	-1000.00	-800.00	-600.00	-400.00	-200.00	0.00	200.00	400.00	600.00	800.00	1000.00

Mesh 48x12													
α	node												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-936.46	-829.62	-665.75	-497.10	-329.68	-167.17	-1.56	165.79	331.60	499.43	669.20	832.76	939.47
0.3-0.4	-946.50	-834.60	-665.51	-496.96	-332.76	-166.47	3.28	167.62	336.55	499.12	663.41	833.14	949.43
0.4-0.5	-954.53	-830.71	-670.54	-502.13	-334.26	-164.24	1.52	166.95	334.57	501.80	669.22	835.34	958.04
Exact	-1000.00	-833.33	-666.67	-500.00	-333.33	-166.67	0.00	166.67	333.33	500.00	666.67	833.33	1000.00



รูปที่ 8 ความเค้นตั้งฉากจากการวิเคราะห์เทียบกับทางทฤษฎี

จากตารางที่ 2 เพื่อความสะดวก ผู้เขียนจะใช้จุดต่อ 2 จุดซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งผิวบนและผิวล่างของคานเข้ามาตามลำดับ สำหรับการเปรียบเทียบกับค่าของความเค้นตั้งฉากที่ได้จากทฤษฎี กล่าวคือ จุดต่อ 2, 4 (โครงตาข่าย 16x4) จุดต่อ2, 6 (โครงตาข่าย 24x6) จุดต่อ 2, 8 (โครงตาข่าย 32x8) จุดต่อ 2, 10 (โครงตาข่าย 40x10) และ จุดต่อ 2, 12 (โครงตาข่าย 48x12) ตามลำดับ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ เหล่านี้ในกรณีที่ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 1.72 , 1.26 , 0.86 , 0.35 และ 0.26 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4

เป็น 48x12 ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 2.20 , 0.49 , 0.19, 0.28 และ 0.06 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีของ α ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยมีค่าเป็นร้อยละ 0.46, 0.22, 0.81, 0.03 และ 0.04 เมื่อโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ตามลำดับ

4.3 ความเค้นเฉือนในระนาบ (Shear stresses)

ในลักษณะเดียวกันกับความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ความเค้นเฉือนในระนาบ $\sigma_{xy}(x,y)$ ก็สามารถแสดงผลได้ดังตารางที่ 3 โดยเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการใช้ α ทั้ง 3 ค่ากับค่าที่ได้จากทฤษฎี ค่าความเค้นเฉือนมากสุดทางทฤษฎี เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของหน้าตัด (Y=0) ซึ่งมีค่าเท่ากับ -125 นิวตันต่อตารางเมตร

จากตารางที่ 3 พบว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีของจุดต่อต่าง ๆ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันกับความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีของ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2-0.3 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 11.50, 5.26 , 2.70 , 1.18 และ 1.80 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 ในกรณีที่ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.3-0.4 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 10.40 , 3.63 , 3.13 , 1.53 และ 1.57 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 เป็น 48x12 และในกรณีที่ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0.4-0.5 พบว่ามีค่าเป็นร้อยละ 8.66 , 5.63 , 3.10 , 2.11 และ 1.52 สำหรับโครงตาข่ายที่มีขนาดเพิ่มขึ้นจาก 16x4 ถึง 48x12 ตามลำดับ ค่าต่าง ๆ ในตารางที่ 3 สามารถนำไปวาดกราฟความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ แยกตามจำนวนของโครงตาข่ายที่สร้างขึ้นมาบนกราฟเดียวกันกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีแสดงได้ดังรูปที่ 9

ตารางที่ 3 ค่าความเค้นเฉือนสำหรับโครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ

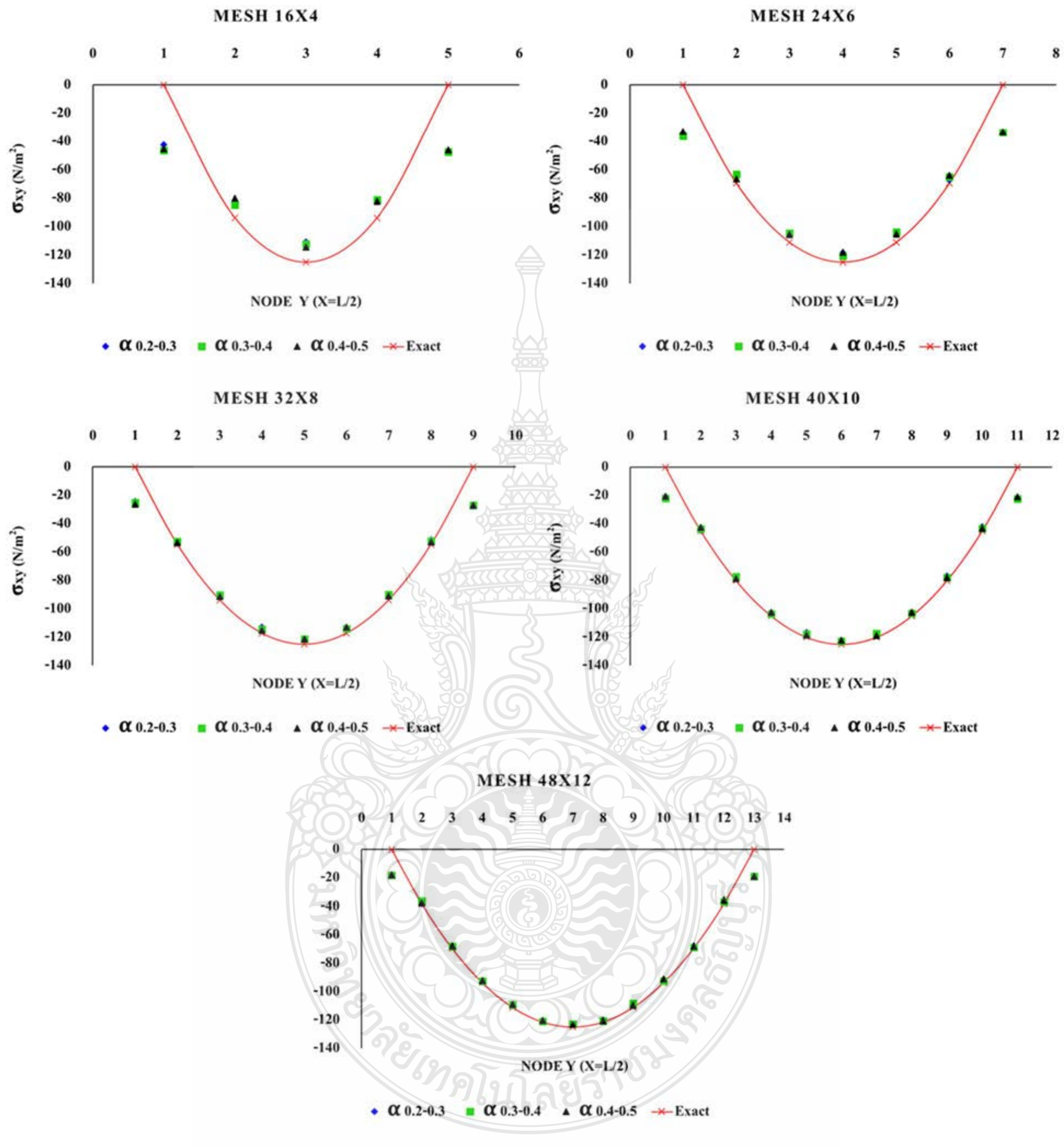
Mesh 16x4					
α	node				
	1	2	3	4	5
0.2-0.3	-42.20	-84.30	-110.62	-82.39	-47.67
0.3-0.4	-46.43	-84.76	-112.00	-81.22	-47.52
0.4-0.5	-45.11	-80.00	-114.17	-82.10	-46.08
Exact	0.00	-93.75	-125.00	-93.75	0.00

Mesh 24x6							
α	node						
	1	2	3	4	5	6	7
0.2-0.3	-34.87	-63.99	-105.63	-118.43	-104.25	-67.04	-33.72
0.3-0.4	-36.29	-63.01	-104.57	-120.46	-103.75	-65.04	-33.53
0.4-0.5	-32.86	-66.43	-105.49	-117.97	-105.37	-63.93	-33.15
Exact	0.00	-69.44	-111.11	-125.00	-111.11	-69.44	0.00

Mesh 32x8									
α	node								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2-0.3	-24.38	-53.55	-91.81	-112.93	-121.63	-114.55	-90.62	-51.49	-27.82
0.3-0.4	-25.18	-52.62	-90.15	-114.43	-121.09	-114.03	-89.85	-52.16	-26.90
0.4-0.5	-26.33	-53.31	-91.13	-115.00	-121.12	-112.80	-90.78	-52.98	-26.82
Exact	0.00	-54.69	-93.75	-117.19	-125.00	-117.19	-93.75	-54.69	0.00

Mesh 40x10											
α	node										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.2-0.3	-21.14	-44.61	-78.13	-102.94	-116.89	-123.52	-117.64	-103.41	-76.84	-42.22	-21.86
0.3-0.4	-22.09	-43.55	-77.16	-103.72	-117.69	-123.09	-117.62	-103.15	-77.88	-43.36	-22.46
0.4-0.5	-20.65	-42.71	-78.84	-102.34	-118.54	-122.37	-119.06	-102.51	-77.84	-43.17	-20.97
Exact	0.00	-45.00	-80.00	-105.00	-120.00	-125.00	-120.00	-105.00	-80.00	-45.00	0.00

Mesh 48x12													
α	node												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.2-0.3	-18.15	-38.03	-67.93	-92.95	-110.01	-120.72	-122.75	-119.76	-110.11	-92.48	-67.62	-36.58	-18.90
0.3-0.4	-18.39	-36.24	-67.94	-92.45	-109.37	-120.88	-123.04	-120.72	-108.16	-92.46	-68.97	-36.75	-19.00
0.4-0.5	-18.09	-37.40	-67.51	-92.34	-109.14	-120.14	-123.10	-120.72	-109.87	-91.19	-67.98	-35.36	-19.16
Exact	0.00	-38.19	-69.44	-93.75	-111.11	-121.53	-125.00	-121.53	-111.11	-93.75	-69.44	-38.19	0.00



รูปที่ 9 ความเค้นเฉือนจากการวิเคราะห์เทียบกับค่าทางทฤษฎี

5. สรุปผล (Conclusions)

ผลจากการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นของคานยื่นในระนาบ 2 มิติด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์จากการสร้างโดเมนสม่ำเสมอ 4 โดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์ทรงเหลี่ยมสี่หน้าพบว่า ทั้งการเปลี่ยนตำแหน่งของปลายคาน (x = L) ความเค้นตั้งฉากรวมทั้งความเค้นเฉือนตลอดความลึกของหน้าตัดคาน ณ ระยะกึ่งกลาง (x = L/2) มีค่าลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงเมื่อทั้งค่าของ α และจำนวนของโครง

ตาข่ายเพิ่มขึ้น โดยพบว่าการเพิ่มขึ้นของจำนวนโครงตาข่ายส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณในระดับเดียวกันกับการเพิ่มขึ้นของค่า α ที่ใช้ ในกรณีของปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติทั่ว ๆ ไปนั้น ข้อเท็จจริงดังกล่าว อาจไม่ส่งผลต่อการคำนวณอย่างชัดเจนในกรณีนี้ แต่สำหรับในกรณีที่รูปทรงของปัญหาในการวิเคราะห์มีความไม่ต่อเนื่องกัน จนทำให้เกิดความเค้นชุมนุม (Stress concentration) ขึ้น หรือในบริเวณปลายรอยแตก (Cracks) ที่เกิด Stress singularity เป็นต้นนั้น สามารถลดเวลาโดยรวมของการวิเคราะห์ลงได้ โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักในบริเวณที่คาดว่าจะเกิดความเค้นชุมนุมดังกล่าว ออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอย่อย ที่มีอัตราส่วนของด้านไม่เท่ากัน $\alpha_x \neq \alpha_y$ ในขณะที่บริเวณอื่น ๆ ซึ่งอยู่ไกลออกไปจากบริเวณดังกล่าวและความเค้นชุมนุมไม่ส่งผลกระทบกับค่าที่คำนวณได้อย่างมีนัยสำคัญนั้น อาจพิจารณาใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่น้อยกว่าควบคู่ไปกับการใช้โดเมนสม่ำเสมอย่อยแบบด้านคงที่ $\alpha_x = \alpha_y$ อาจส่งผลให้การคำนวณที่ได้มีความถูกต้องและแม่นยำอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง เนื่องจากไม่ต้องทำการโยงความสัมพันธ์ระหว่าง Physical element และ Parent element หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือไม่ต้องคำนวณหาค่าดีเทอมิเนนท์ของจาโคเบียนเมทริกซ์นั่นเอง สำหรับงานวิจัยในขั้นต่อไปนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบของการสร้างโดเมนสม่ำเสมอย่อยแบบ Semi-unit cell กับรูปทรงทางเรขาคณิตของปัญหาที่ใช้เอลิเมนต์แบบ RVE (Representative volume element) ร่วมกับเงื่อนไขขอบแบบซ้ำกัน (Periodic boundary conditions) ในการวิเคราะห์ เป็นสิ่งที่ควรศึกษาเพื่อหาแนวทางในการปรับปรุงวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ให้มีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้นไป

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้เขียนขอขอบคุณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี สำหรับการสนับสนุนงานวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Bathe K-J. *Finite element procedures*, Prentice hall. New Jersey. 1996.

[2] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ. The finite element method: its basis and fundamentals: Elsevier; 2005.

[3] Hughes TJ. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Courier Corporation, 2012.

[4] Liu, G.; Trung, N.T. *Smoothed Finite Element Methods*, CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2010.

[5] Liu, G.R.; Dai, K.Y.; Nguyen, T.T. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Comput. Mech*. 2007, 39, pp.859–877.

[6] Dai K, Liu G, Nguyen T. An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics. *Finite elements in analysis and design*. 2007, 43(11-12), pp.847-60.

[7] Liu G, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T, Xu X. A novel Galerkin-like weak form and a superconvergent alpha finite element method (SαFEM) for mechanics problems using triangular meshes. *Journal of Computational Physics*. 2009, 228(11), pp.4055-87.

[8] Liu G, Zhang G. A normed G space and weakened weak (W^2) formulation of a cell-based smoothed point interpolation method. International *Journal of Computational Methods*, 2009, 6(01), pp.147-79.

[9] Hamrani A, Habib SH, Belaidi I. CS-IGA: A new cell-based smoothed isogeometric analysis for 2D computational mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 315, pp.671-690.

[10] Wang D, Zhang H, Xuan J. A strain smoothing formulation for NURBS-based isogeometric finite element analysis. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*. 2012, 55(1), pp.132-140.

[11] Bordas SP, Rabczuk T, Hung N-X, Nguyen VP, Natarajan S, Bog T, et al. Strain smoothing in FEM and XFEM. *Computers & structures*. 2010, 88(23-24), pp.1419-1443.

[12] Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering.* 2009, 25(8), pp.882-906.

[13] Dai K, Liu G. Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM). *Journal of Sound and Vibration.* 2007, 301(3-5), pp.803-820.

[14] Natick, *MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2019b).* Massachusetts, The MathWorks Inc.,2018.

[15] Felippa CA. *Introduction to finite element methods (Lecture note).* University of Colorado. 2004.

[16] Liu G-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method,* Taylor & Francis, 2009.

[17] Chen JS, Wu CT, Yoon S, You Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods*. International journal for numerical methods in engineering*, 2001, 50(2), pp.435-466.

[18] Liu G. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods. *International Journal of Computational Methods*. 2008, 5(02), pp.199-236.

[19] Timoshenko S, Goodier J. *Theory of Elasticity*, 3rd ed, McGraw-Hill. New York. 1970.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล นายวิเชียร จันทร์ชุม

วัน เดือน ปีเกิด 29 ตุลาคม 2524

ที่อยู่ 87 หมู่ที่ 3 ตำบลแดนสงวน อำเภอระโนด จังหวัดสงขลา 90140

การศึกษา ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ประสบการณ์การทำงาน

2549-2558 วิศวกรโยธา บริษัท พีเคที เอ็นจิเนียริ่งเซอร์วิส จำกัด

2558-2559 วิศวกรโยธาปฏิบัติการ สำนักงานการปฏิรูปที่ดินเพื่อเกษตรกรรม

2559-ปัจจุบัน วิศวกรโยธาปฏิบัติการ กรมชลประทาน

เบอร์โทรศัพท์ 093-584-2644

อีเมล์ wichian_j@mail.rmutt.ac.th

wic.jan@gmail.com