


สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์
หลัก สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ

CELL-BASED N-SIDED POLYGONAL SMOOTHED FINITE ELEMENT
ANALYSIS FOR 2D PLANE STRESS PROBLEM



ณัฐยา เสียงใส

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2564
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิ
เมนต์หลัก สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี
ปีการศึกษา 2564
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยที่เกิดจากการค้นคว้าและวิจัย ขณะที่ข้าพเจ้าศึกษาอยู่ในคณะ
วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ดังนั้นงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือเป็น
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี และข้อความต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้า
ขอรับรองว่าไม่มีการคัดลอกหรือนำงานวิจัยของผู้อื่นมานำเสนอในชื่อของข้าพเจ้า

This thesis consists of research materials conducted at the Faculty of Engineering,
Rajamangala University of Technology Thanyaburi and hence the copyright owner. I
hereby certify that the thesis does not contain any forms of plagiarism.

ณัฐยา เสียงใส
.....
(...ณัฐยา เสียงใส...)



หัวข้อวิทยานิพนธ์

สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบสร้างโดเมนย่อยภายใน
ในเอลิเมนต์หลัก สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ
Cell-based N-Sided Polygonal Smoothed Finite Element Analysis
for 2D Plane Stress Problem

ชื่อ - นามสกุล

นางสาวณัฐยา เสียงใส

สาขาวิชา

วิศวกรรมโยธา

อาจารย์ที่ปรึกษา

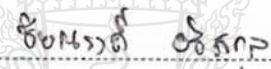
ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.

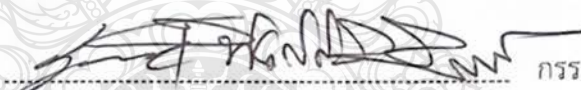
ปีการศึกษา

2564

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญชัย ผึ้งไฉ่งาม, ปร.ด.)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ชัยณรงค์ อธิสกุล, ปร.ด.)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศกสิทธิ พงศ์ศิวะสถิตย์, Ph.D.)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิเกต, Ph.D.)

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี อนุมัติวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์สรพงษ์ ภาสุปรีดิ์, Ph.D.)

วันที่ 1 เดือน เมษายน พ.ศ. 2565

หัวข้อวิทยานิพนธ์	สมุทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลัก สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ
ชื่อ-นามสกุล	นางสาวณัฐยา เสียงใส
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์กำธรเกียรติ มุสิกเกต, Ph.D.
ปีการศึกษา	2564

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาวิธีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมีการแบ่งโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักออกเป็นเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าโดเมนขอบเขตของปัญหาซึ่งถูกแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมนั้น ถูกสร้างขึ้นมาจากการแปลงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมจากขั้นตอนการสร้างโครงตาข่ายเหมือนกับวิธีที่ใช้ในไฟไนท์เอลิเมนต์ภายในโดเมนสม่ำเสมอจำนวนเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าที่ถูกสร้างขึ้น เท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

ปัญหาที่ใช้สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ เป็นปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติของคานยื่นปลายรับแรงเฉือนแบบพาราโบลาที่ปลายคานด้านอิสระเป็นตัวอย่างในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทำการวิเคราะห์ โดยกำหนดจำนวนการแบ่งโครงตาข่ายเอลิเมนต์หลักจำนวน 5 ชุด ทำการศึกษาผลการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานและหาค่ามาตรฐานความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนแปลงโดยเปรียบเทียบผลที่ได้กับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมเชิงเส้นและรูปทรงสี่หน้าเชิงเส้นคู่ นอกจากนี้ยังทำการวิเคราะห์ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่หน้าตัดกึ่งกลางความยาวของคาน

ถึงแม้ว่าผลจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้ มีค่าอยู่ระหว่างผลจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ T3 และ Q4 ในช่วงของโครงตาข่ายที่มีความละเอียดต่ำ ความแม่นยำในการคำนวณและเข้าใกล้ค่าทางทฤษฎีที่มากกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น เกิดขึ้นจากการใช้ความละเอียดมากที่สุดของโครงตาข่าย ในมุมมองของผู้เขียนเชื่อว่า การไม่ต้องทำ Mapping ระหว่าง Physical และ Parent Elements รวมทั้งความยืดหยุ่นของการใช้รูปหลายเหลี่ยมสมุทไฟไนท์เอลิเมนต์นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับรูปร่างหรือขอบเขตของปัญหาที่มีความซับซ้อนหรือในบริเวณที่มีความไม่เข้ากันของโครงตาข่ายได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : ความเค้นในระนาบสองมิติ เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม แรงเฉือนพาราโบลา สมุทไฟไนท์เอลิเมนต์ การวิเคราะห์

Thesis Title	Cell- based N- Sided Polygonal Smoothed Finite Element Analysis for 2D Plane Stress Problem
Name-Surname	Miss Nathaya Siangsai
Program	Civil Engineering
Thesis Advisor	Assistant Professor Kamtornkiat Musiket, Ph.D.
Academic Year	2021

ABSTRACT

This research examined a polygonal cell-based smoothed finite element in which the smoothing domain is divided to quadrilateral elements. Problem domain discretized to n-sided polygonal elements, is constructed by transformation of triangular or quadrilateral shape constructed from meshing procedures in a standard finite element. Inside the smoothing domains, the established quadrilateral elements are equal to a number of polygonal element sides.

A cantilever two-dimensional plane stress beam subjected to parabolic shear traction at the free end was utilized as a benchmark problem for mathematical modeling. A problem domain was discretized with five polygonal meshes. The beam's responses including vertical displacement and its corresponding error norm were compared to finite elements using T3 and Q4 elements and analytical solutions. Normal and shear stresses were also investigated as well.

Despite the fact that the results obtained from the method arranged between the results from T3 and Q4 finite element method for coarse meshes, more accurate finite element and close to analytical solutions can be achieved at the finest mesh. There is no mapping between physical and parent elements. It can be observed that the flexibility of using a polygonal cell-based smoothed finite element can be employed for complex regions/shapes or non-matching mesh areas efficiently.

Keywords: two-dimensional plane stress, n-sided polygonal element, parabolic shear traction, smoothed finite element, analysis

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษา ค้นคว้า ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณา และความอนุเคราะห์ของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กำธรเกียรติ มุสิเกต อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้ทำการศึกษาวิจัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย ผึ้งไผ่งาม ประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภลลิตี พงศ์วิเศษสถิตย์ ที่ได้ให้ความกรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขข้อบกพร่องของงานวิจัยรวมทั้งเสียสละเวลามาเป็นคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยณรงค์ อธิสกุล กรรมการและผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ได้ให้ความกรุณาเสียสละเวลามาร่วมเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และให้คำแนะนำในด้านต่างๆ อันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัยนี้

ขอขอบพระคุณ และมอบความดีทั้งหมดนี้ให้แก่ คุณพ่อ คุณแม่ น้องสาว พี่คนที่รักและคณะครู-อาจารย์ ที่ให้การสนับสนุนและประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดมา และเพื่อนๆ สาขาวิศวกรรมโครงสร้างทุกคนที่เป็นกำลังใจ

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้สนใจหากการค้นคว้าในครั้งนี้ขาดตกบกพร่อง หรือไม่สมบูรณ์ประการใด ผู้วิจัยขอกราบขออภัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย



ณัฐยา เสียงใส

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	(3)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	(4)
กิตติกรรมประกาศ.....	(5)
สารบัญ.....	(6)
สารบัญตาราง.....	(7)
สารบัญรูป.....	(8)
บทที่ 1 บทนำ.....	10
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	10
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์.....	12
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	12
1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ.....	12
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	13
2.1 หลักพื้นฐานของกลศาสตร์ของแข็ง.....	13
2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	20
2.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	22
2.4 สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบแบ่งโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลัก.....	27
2.5 ความแตกต่างระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์.....	30
2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	31
บทที่ 3 วิธีการวิจัย.....	34
3.1 สมการพื้นฐานวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์.....	34
3.2 การสร้างเอลิเมนต์หลักและเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอรูปหลายเหลี่ยม.....	36
3.3 ปัญหาสำหรับการทดสอบ.....	40
บทที่ 4 ผลการศึกษาวิเคราะห์.....	42
4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน.....	42
4.2 ความเค้นตั้งฉาก.....	48
4.3 ความเค้นเฉือน.....	52
บทที่ 5 สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ.....	55
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	55
5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต.....	56
บรรณานุกรม.....	57
ประวัติผู้เขียน.....	61

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 1 การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง.....	42
ตารางที่ 2 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งที่ปลายคาน.....	43



สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 1 ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ	13
รูปที่ 2 ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ 2 มิติ.....	14
รูปที่ 3 ปัญหาการวิเคราะห์ความสมมาตรตามแนวแกน	14
รูปที่ 4 โมเดลทางกายภาพของของแข็งสำหรับ 3 มิติ.....	15
รูปที่ 5 องค์ประกอบของความเค้นในเอลิเมนต์ 3 มิติ	15
รูปที่ 6 สมดุลขององค์ประกอบของความเค้นในลูกบาศก์.....	18
รูปที่ 7 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม.....	20
รูปที่ 8 เอลิเมนต์แบบแท่ง.....	22
รูปที่ 9 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมใน 2 มิติ	23
รูปที่ 10 เอลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติ	24
รูปที่ 11 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	24
รูปที่ 12 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม	25
รูปที่ 13 สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม	27
รูปที่ 14 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมออกเป็นโดเมนย่อยสมำเสมอรูปสามเหลี่ยม.....	28
รูปที่ 15 การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม	28
รูปที่ 16 การหาค่าฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลายเหลี่ยม	30
รูปที่ 17 ความแตกต่างของขั้นตอนการสร้างความเครียดทั้ง 2 วิธี.....	31
รูปที่ 18 ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม.....	37
รูปที่ 19 การกำหนดจุดศูนย์กลางและจุดกึ่งกลางด้านของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	38
รูปที่ 20 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนที่ 7.....	38
รูปที่ 21 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับคานตัวอย่าง.....	39
รูปที่ 22 เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม.....	39
รูปที่ 23 เอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอรูปทรงสี่หน้า.....	40
รูปที่ 24 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนปลายคาน.....	40
รูปที่ 25 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 16X4	43
รูปที่ 26 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 24X6	44
รูปที่ 27 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 32X8	44
รูปที่ 28 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 40X10.....	45
รูปที่ 29 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 48X12.....	45
รูปที่ 30 แบบจำลองการเสียรูปในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 48X12.....	46
รูปที่ 31 การกระจายตัวของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (โครงตาข่ายขนาด 48X12).....	47

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 32 ลักษณะการกระจายตัวค่าการเคลื่อนที่ในแนวราบ (โครงตาข่ายขนาด 48X12)	47
รูปที่ 33 การกระจายตัวค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (โครงตาข่ายขนาด 48X12) ปรับสเกลแกน Y.....	47
รูปที่ 34 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 16X4 ขยายสเกลแกน X ให้ถึง 6 และ -6.....	48
รูปที่ 35 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 24X6.....	49
รูปที่ 36 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 32X8.....	49
รูปที่ 37 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 40X10.....	50
รูปที่ 38 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 48X12	50
รูปที่ 39 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคาน(โครงตาข่ายขนาด 48X12).....	51
รูปที่ 40 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคาน(โครงตาข่ายขนาด 48X12).....	51
รูปที่ 41 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 16X4 ขยายสเกลแกน X ให้ถึง 6 และ -6.....	52
รูปที่ 42 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 24X6.....	53
รูปที่ 43 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 32X8	53
รูปที่ 44 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 40X10.....	54
รูปที่ 45 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 48X12	54

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมในปัจจุบันนั้น มีความซับซ้อนมากกว่าในอดีต อันเนื่องมาจากปัจจัยหลายอย่าง เช่น ความต้องการใช้งานที่หลากหลาย ประเภทของวัสดุที่เกิดขึ้นมาใหม่ ความซับซ้อนซึ่งมาจากหลาย ๆ ส่วนด้วยกัน ได้แก่ ความซับซ้อนของรูปทรงเรขาคณิตของปัญหา ความซับซ้อนของฟังก์ชันการใช้งานที่ต้องตอบสนองผู้ใช้ที่มีความแตกต่างกัน ความซับซ้อนของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นแบบเชิงเส้น (Nonlinear) ระหว่างตัวแปร (Unknown Variables or Fields) ที่ไม่ทราบค่ากับตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว ความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของแรงกระทำภายนอก กรณีของการเกิดปฏิสัมพันธ์กันระหว่างวัตถุทั้งสองเช่นในกรณีของของไหลกับของแข็ง (Fluid-Structure Interactions) เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้ โดยทั่วไป มักจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown variables or fields) กับสิ่งที่ทราบค่าแล้ว (known variables or constraints) ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (Ordinary Differential Equations) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ในลำดับ (order) ต่าง ๆ สมการเหล่านั้น หากอยู่ในรูปที่สามารถหาค่าผลเฉลยได้ด้วยการแก้สมการคณิตศาสตร์โดยตรง เรียกผลเฉลยที่ได้ว่า ผลเฉลยแม่นยำ (Exact solutions) และเรียกวิธีการหาค่าตอบนั้นว่าวิธีการวิเคราะห์โดยตรง (Analytical Method) หากสมการทางคณิตศาสตร์นั้นมีความซับซ้อนมากและไม่สามารถหาค่าผลเฉลยได้โดยตรง จำเป็นต้องใช้วิธีการอื่นที่เรียกว่าวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Methods) ผลเฉลยดังกล่าวนี้จะเรียกว่าผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate solutions) นั่นเอง คำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีทางตัวเลขนี้ถึงแม้ว่าจะมีความแม่นยำเพียงพอที่จะใช้อธิบายพฤติกรรมทางกายภาพที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาจริงนั้นก็ตาม แต่ก็ยังไม่ใช่ผลเฉลยที่แท้จริง การลู่เข้าของผลเฉลยโดยประมาณไปสู่ผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหาทางด้านวิศวกรรมนั้น ขึ้นอยู่กับแนวคิดและกรรมวิธีของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ นั่นเอง

ในอดีตที่ผ่านมา วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมากมายได้ถูกเสนอมากมายหลายวิธี เพื่อที่จะแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมที่นับวันจะเพิ่มความยากในการวิเคราะห์มากขึ้นหรืออาจไม่สามารถวิเคราะห์ได้แม้จากการทดลอง วิธีการเชิงตัวเลขเหล่านั้น เริ่มตั้งแต่ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method) [1] วิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) [2] วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Methods) [3-5] วิธีเอลิเมนต์ขอบ (Boundary Element Method) [6] วิธีสเปกตรัลเอลิเมนต์ (Spectral Element Method) [7] วิธีเมสสิจ (Meshless Methods) [8] วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หลายเหลี่ยม (Polygonal Finite Element Method) [9] วิธี Isogeometry Analysis [10] วิธีขอบขยายไฟไนต์เอลิเมนต์ (Scaled Boundary Finite Element Method) [11] และวิธีเอลิเมนต์เสมือน

(Virtual Element Method) [12] เป็นต้น รวมทั้งวิธีการอื่น ๆ ที่กำลังถูกคิดค้นพัฒนาโดยนักวิจัยทั่วโลกในปัจจุบัน ในบรรดาวิธีการดังกล่าวที่ได้กล่าวถึงมาแล้วนั้น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จัดว่าเป็นวิธีพื้นฐานที่สำคัญที่สุดของการคิดค้นพัฒนาวิธีการใหม่ๆขึ้นมา รวมทั้งวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอ (Smoothed Finite Element Method, SFEM) [13] ด้วยเช่นกัน ถึงแม้ว่าจะมีรายละเอียดปลีกย่อยที่มีความแตกต่างกันบ้าง ขึ้นอยู่กับสมมุติฐานที่เลือกใช้ แต่หลักการสำคัญที่เหมือนกันของวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเหล่านี้ คือความพยายามในการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงถึงพฤติกรรมของปัญหาทางกายภาพเหล่านั้นซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์หรือสมการอนุพันธ์ย่อยลำดับต่าง ๆ กัน ที่เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า “Strong Form” ให้อยู่ในรูปที่ง่ายกว่าและสามารถทำการอินทิเกรตได้ ซึ่งรู้จักในชื่อเรียกว่า “Weak Form” หรือ “Integral Form” อันจะทำให้สามารถแก้ปัญหาเหล่านั้นได้ง่ายกว่า ถึงแม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั่วโลกอันเนื่องมาจากความสามารถในการแก้ปัญหาได้หลากหลายของมันก็ตาม แต่ก็ยังมีข้อด้อยหรือข้อจำกัดอีกหลายอย่างที่ต้องได้รับการปรับปรุง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาสติฟเนสที่มีความแข็งแกร่งเกินจริง (Overly Stiff) ปัญหาในเรื่องของความแม่นยำของค่าความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ (Stress Accuracy) สำหรับการเลือกใช้เอลิเมนต์ ปัญหาเรื่องการเสียรูปอย่างมากของเมช (Mesh Distortion) ในสภาวะการเปลี่ยนตำแหน่งมาก ๆ (Large Displacement) ปัญหาเรื่องการสร้างโครงตาข่าย [13] เป็นต้น

งานวิจัยนี้ มุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์ศึกษาปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายใน 2 มิติ โดยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB ซึ่งมีพื้นฐานอยู่บนวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยการสร้างโดเมนสม่ำเสมอหรือเอลิเมนต์หลายเอลิเมนต์ขึ้นมาจากภายในโดเมนหลักของปัญหา โดยเอลิเมนต์หลักเหล่านั้น เป็นแบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-Sided Polygonal Element) ต่อไป จึงทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักเหล่านั้น ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอ (Smoothed Elements) รูปทรงเหลี่ยมสี่หน้าเชิงเส้นคู่ (Bilinear Quadrilateral Element, Q4) ซึ่งอยู่ภายในเอลิเมนต์หลักต่อไป ตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ในครั้งนี้ กำหนดให้ใช้คานยื่นปลาย (Cantilever Beam) รับแรงเฉือนในแนวตั้งเป็นรูปพาราโบลา (Parabolic Traction) กระทำที่ปลายคานด้านอิสระ ในขณะที่ปลายอีกด้านหนึ่งถูกยึดแน่น ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ ได้แก่ การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานยื่น (Tip Displacement) ความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเฉือน (Normal and Shear Stresses) จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำซึ่งได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีโดยตรง รวมทั้งเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

การจัดเรียงเนื้อหาของวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ ประกอบไปด้วย บทที่ 1 บทนำ ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ ขอบเขตของการศึกษาและผลที่คาดว่าจะได้รับ บทที่ 2 กล่าวถึง ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 กล่าวถึงวิธีการศึกษาและดำเนินงานวิจัย ผลการศึกษาและสรุปผลและข้อเสนอแนะจะถูกกล่าวถึงในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับต่อไป

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติด้วยวิธี Smoothed Finite Element แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-Sided Polygonal Element) แบบใช้การสร้างโดเมนย่อยต่อเนื่องสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลัก (Cell-based)

1.2.2 เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติด้วยวิธี Smoothed Finite Element ซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยจากเอลิเมนต์หลัก (Cell-based) แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-sides Polygonal Element)

1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำ (Exact Solution) ของปัญหากับการผลจากการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธี Smoothed Finite Element ซึ่งใช้การสร้างโดเมนย่อยจากเอลิเมนต์หลัก (Cell-based) แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า (n-sides Polygonal Element) รวมทั้งเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างโดเมนความเครียดแบบสม่ำเสมอซึ่งอยู่ภายในเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า

1.3.2 วิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างโดเมนความเครียดแบบสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์แบบทรงเหลี่ยมหลายหน้า ด้วยโปรแกรม MATLAB

1.3.3 วิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลาย (Cantilever Beam) ใน 2 มิติ

1.4 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 เข้าใจทฤษฎีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอด้วยวิธี Cell-based Smoothed Finite Element จากเอลิเมนต์รูปทรงหลายเหลี่ยม

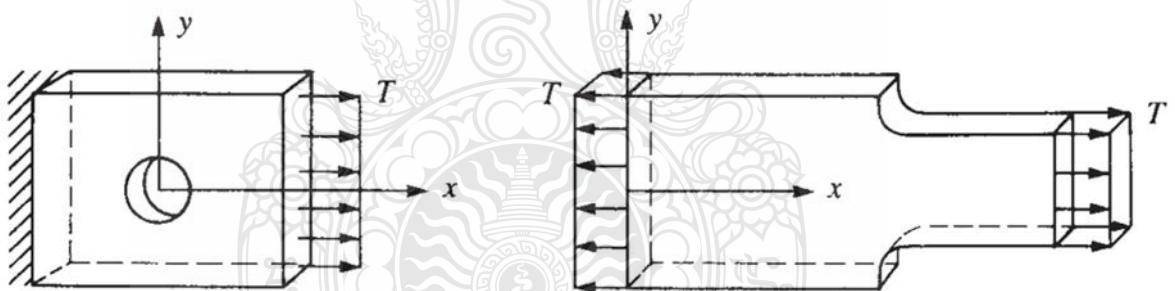
1.4.2 มีโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB ต้นแบบสำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นในระนาบ 2 มิติ ซึ่งสามารถพัฒนาเพิ่มเติมต่อไปสำหรับปัญหาทางวิศวกรรมอื่น ๆ รวมทั้งปัญหาในสามมิติ

บทที่ 2

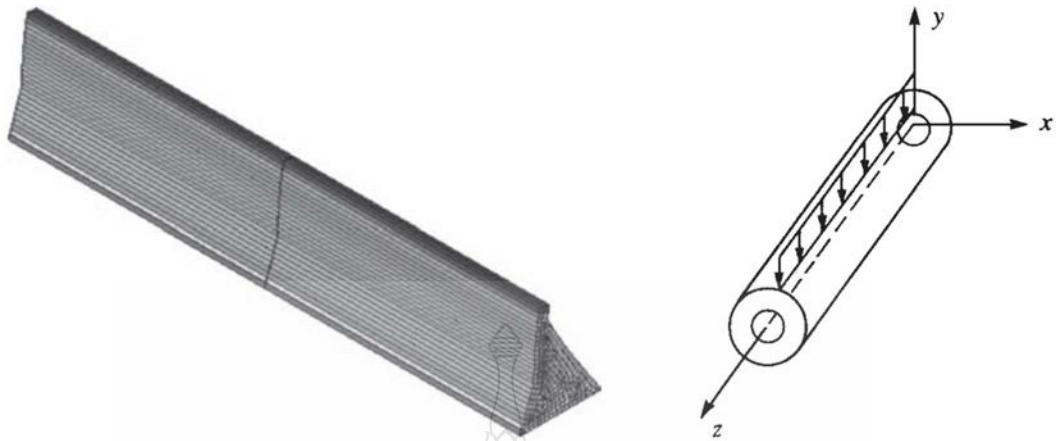
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 หลักพื้นฐานของกลศาสตร์ของแข็ง (Fundamental Solid Mechanics)

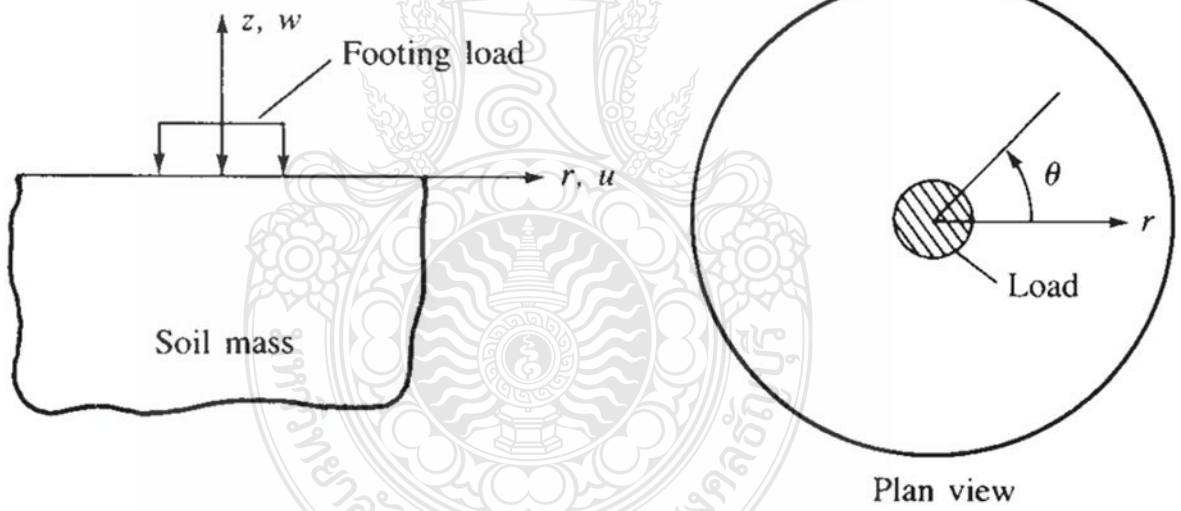
2.1.1. สมการอีลาสติก (Elasticity Equations) ของปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม โดยทั่วไปแล้วมักจะแสดงในรูปของการเคลื่อนที่ (displacements) ความเค้น (stresses) ความเครียด (strains) เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) เงื่อนไขตอนเริ่มต้น (initial conditions) หรือสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับความเค้น (constitutive equations) โดยมีสมมุติฐานที่สำคัญคือ ค่าความเครียดที่เกิดขึ้นภายในวัตถุนั้น ๆ ถือว่ามีค่าน้อยมาก (small strain) และไม่คำนึงถึงผลของความไม่มีเสถียรภาพจากการโก่งตัวด้านข้างมารวมด้วย ปัญหาเหล่านั้นใน 2 มิติ แท้จริงแล้วก็เป็นการจำลองโมเดลมาจากระบบ 3 มิติ เพื่อความสะดวกในการหาค่าต่าง ๆ นั้นเอง โดยทั่วไป สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภท คือ ปัญหาความเค้นในระนาบ (plane stress) ความเครียดในระนาบ (plane strain) และปัญหาความสมมาตรตามแนวแกน (axisymmetric) ตามรูปที่ 1, 2, และ 3 ตามลำดับ



รูปที่ 1 ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในระนาบ 2 มิติ [14]

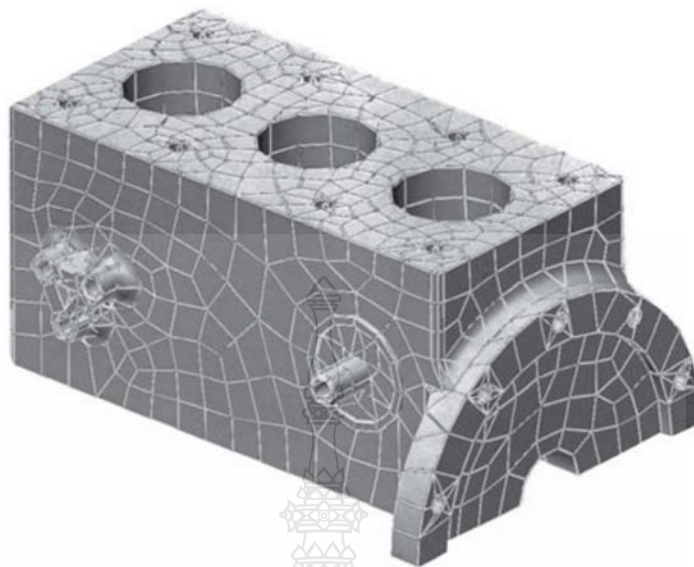


รูปที่ 2 ปัญหาการวิเคราะห์ความเครียดในระนาบ 2 มิติ [14]

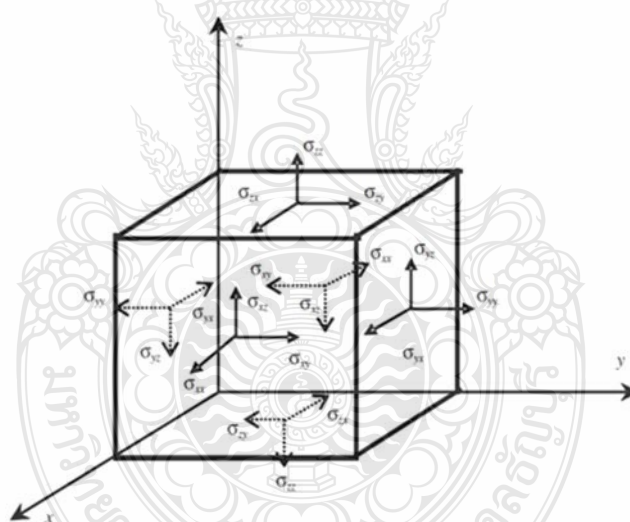


รูปที่ 3 ปัญหาการวิเคราะห์ความสมมาตรตามแนวแกน [14]

2.1.2. สมการอีลาสติคสำหรับของแข็งใน 3 มิติ



รูปที่ 4 โมเดลทางกายภาพของของแข็งสำหรับ 3 มิติ [14]



รูปที่ 5 องค์ประกอบของความเค้นในเอลิเมนต์ 3 มิติ [14]

หากพิจารณาลูกบาศก์ขนาดเล็ก ๆ ซึ่งมีปริมาตรเป็น dV ดังแสดงในรูปที่ 5 พบว่า ด้านทั้งหกของพื้นผิวซึ่งตั้งฉากกับแกนทั้งสามนั้น ประกอบไปด้วย องค์ประกอบของความเค้นตั้งฉาก (normal stress) และองค์ประกอบของความเค้นเฉือน (shear stress) ตามแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ ทิศทางของความเค้นที่ปรากฏในรูปนั้น จะถูกกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด องค์ประกอบของความเค้นและความเครียดทั้ง 6 ค่า ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T \quad (1)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}^T \quad (2)$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งสามแกน สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

เมื่อ u , v และ w คือการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางแกน x , y และ z ตามลำดับ ในทางกลศาสตร์ นิยมเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งโดยใช้เมทริกซ์โอเปอเรชันที่เรียกว่า Differential Operator, L , ซึ่งสามารถเปลี่ยนสมการที่ (3) ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\epsilon = LU, \quad U = \{u, v, w\}^T \quad (4)$$

เมื่อ U คือเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง และ L เป็นเมทริกซ์โอเปอเรชันแสดงได้ดังสมการที่ (5)

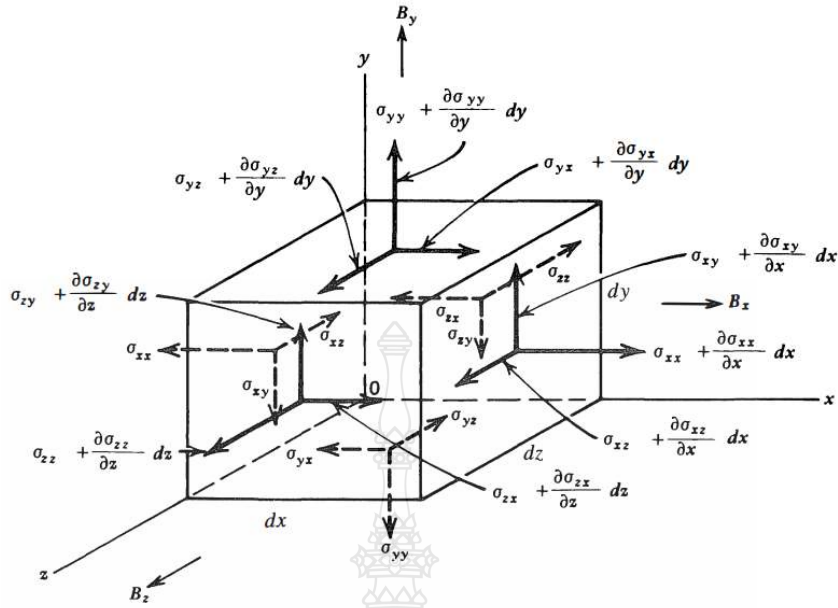
$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

สุดท้าย สมการซึ่งใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Constitutive Equation) ของของแข็งที่มีพฤติกรรมในช่วงอีลาสติกแบบเชิงเส้น (Linear Elasticity) สามารถแสดงได้เป็น

$$\sigma = E\epsilon \quad (6)$$

2.1.3. สมการสมดุลทางไดนามิกส์ (Dynamics equilibrium equations)

สมการสมดุลทางไดนามิกส์ของของแข็งนั้น สามารถเขียนได้โดยการพิจารณาความสมดุลของเอลิเมนต์ลูกบาศก์ดังในรูปที่ 6 ซึ่งหาได้จากการพิจารณารวมผลของแรงเฉื่อย (Inertia Forces) เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุเข้าไปในรูปที่ 5 นั้นเอง เพราะฉะนั้น สมการสมดุลไดนามิกซ์ในทิศทางแกน X สามารถเขียนได้จากผลรวมของแรงทั้งหมดและแสดงได้เป็น



รูปที่ 6 สมดุลขององค์ประกอบของความเค้นในลูกบาศก์ [15]

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz \\
 & + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_{yx} dx dz \\
 & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_{zx} dx dy \\
 & + f_x dx dy dz = \rho \ddot{u} dx dy dz
 \end{aligned} \tag{7}$$

สัญลักษณ์ σ ซึ่งมีเครื่องหมายตัวห้อย หมายถึง ความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบซึ่งตั้งฉากกับแกนทั้งสาม ดังแสดงในรูปที่ 6 โดยเทอมทางด้านขวามือของสมการ หมายถึงเทอมที่ได้มาจากแรงเฉื่อย โดย \ddot{u} หมายถึง อนุพันธ์ลำดับที่สองของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลา หรือคือความเร่งในขณะที่มีตัวแปร f_x หมายถึง เทอมที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกนั้นเอง สมการที่ (7) สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = \rho \ddot{u} \tag{8}$$

ในลักษณะเดียวกัน สมการความสมดุลไดนามิกในทิศทางของแกน Y และ Z ก็สามารถเขียนโดยการรวมแรงที่เกิดขึ้นทั้งหมดเข้าด้วยกัน นั่นคือ สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้คือ

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = \rho \ddot{v} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho \ddot{w} \quad (10)$$

เมื่อ \ddot{v} และ \ddot{w} คือ ความเร่งตามแนวแกน Y และ Z ตามลำดับ

สมการสมดุลทั้ง 3 สมการดังกล่าวข้างต้น สามารถนำมาเขียนรวมกันให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ทั่วไปอย่างย่อได้เป็น

$$L^T \sigma + f_b = \rho \ddot{u} \quad (11)$$

หากทำการเปลี่ยนค่าของความเค้นในสมการที่ 11 ให้อยู่ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งผ่านสมการที่ 4-6 แล้ว สมการที่ 11 จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$L^T ELU + f_b = \rho \ddot{u} \quad (12)$$

สมการที่ (12) คือสมการรูปทั่วไปของสมการสมดุลไดนามิก (Dynamics Equilibrium Equation) สำหรับของแข็งซึ่งสามารถใช้ได้กับทั้งปัญหาในสองและสามมิติ สำหรับกรณีที่แรงกระทำภายนอกต่อของแข็งเป็นแรงประเภทสถิตยศาสตร์ (Static Loadings) เพียงอย่างเดียว นั้น สมการทั่วไปของสมดุลทางสถิตยสำหรับของแข็ง สามารถแสดงได้ด้วยการกำหนดให้ค่าของแรงเฉื่อยซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของสมการที่ 12 มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$L^T \sigma + f_b = 0 \quad (13)$$

สมการที่ (13) คือสมการที่นิยมเรียกกันว่าเป็น “Strong form” ของสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาของแข็ง สมการดังกล่าว มีความหมายว่า ผลเฉลยของตัวแปรหลัก (primary variables) ที่ต้องการทราบค่าในสมการที่ (13) นั้น เมื่อถูกแทนค่าลงไปแล้ว จะต้องทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าที่อยู่ภายใต้ขอบเขตของปัญหาที่กำลังสนใจหรือศึกษาอยู่นั่นเอง

2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) หนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่มีการพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาสมการอนุพันธ์หรือสมการอนุพันธ์ย่อยทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมซึ่งไม่สามารถหาคำตอบหรือผลเฉลยที่แท้จริง (Exact solutions) ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี (Analytical method) โดยตรง เริ่มจากความพยายามในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับปีกเครื่องบินของบริษัทโบอิงโดยในอเมริกาและบริษัทโรลสรอย์ในสหราชอาณาจักรตั้งแต่ปี ค.ศ. 1950 M.J. Turner, R.W.Clough, H.C. Martin และ L.J. Topp ได้ตีพิมพ์ขั้นตอนการรวมกันของเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ในปี 1956 ซึ่งในขณะนั้นยังไม่ปรากฏคำว่า “ไฟไนต์เอลิเมนต์” [16] ต่อมา Ray Clough ซึ่งเป็นศาสตราจารย์ที่ University of California Berkeley ในขณะนั้น ได้ตีพิมพ์ผลงานซึ่งใช้คำว่าไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นคนแรกและเป็นจุดเริ่มต้นให้ศาสตราจารย์รุ่นใหม่ที่เกี่ยวข้องกันได้แก่ E. Wilson และ R.L. Taylor สนใจและพัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับนักศึกษาปริญญาเอกในขณะนั้นได้แก่ T.J.R. Hughes, C. Felippa และ K.J. Bathe จนทำให้ University of California Berkeley มีชื่อเสียงโด่งดังและกลายเป็นศูนย์กลางของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในอเมริกาไปอีกนานหลายปี [17]

หลักการพื้นฐานที่สำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การแบ่งโดเมนของปัญหา (Discretization) ที่จะทำการวิเคราะห์ของเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) โดยที่แต่ละเอลิเมนต์จะทำการเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อ (Nodes) ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 7 การสร้างสมการ จะแบ่งออกเป็นสองระดับ ในระดับแรก เป็นการสร้างสมการในระดับเอลิเมนต์โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการที่กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ 2.1.2-2.1.3 เรียกว่า สมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ (Element stiffness equation) ในระดับที่สอง เป็นการสร้างสมการสติฟเนสของทั้งโดเมนปัญหาซึ่งได้มาจากการรวมกันของสมการในระดับที่หนึ่งนั่นเอง เรียกว่า สมการสติฟเนสหลัก (Global stiffness equation)



รูปที่ 7 เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม [17]

2.2.1 หลักของการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีที่นิยมใช้ในการเปลี่ยนรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งอยู่ในรูปของ Strong Form ไปเป็น Weak Form นั้น มีอยู่ 2 วิธี ได้แก่ วิธีเศษส่วนน้ำหนักตกค้าง (Weighted Residual Methods) และวิธีการแปรผัน (Variational Methods) [18] ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted Residual Methods) สำหรับวิธีแรกนั้น มีแนวคิดคือการสมมติผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบของการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement boundary conditions) ขึ้นมา เนื่องจากผลเฉลยนี้ ไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำ เพราะฉะนั้น เมื่อทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณที่สมมติไว้ นี้ ลงไปในสมการอนุพันธ์ย่อยที่สนใจแล้วนั้น จะส่งผลให้สมการมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ตามเงื่อนไขขอบเขต หรือสามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า มีค่าเท่ากับเศษตกค้าง (residual) อันเนื่องมาจากการที่เป็นผลเฉลยโดยประมาณนั่นเอง ดังนั้น หากต้องการทำให้ผลลัพธ์นี้มีความเบี่ยงเบนจากค่าแม่นยำน้อยที่สุดหรือใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมากที่สุดแล้วนั้น (Minimization) จึงต้องหาวิธีทำให้เศษตกค้างนี้ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด วิธีการที่ใช้ได้แก่ การคูณเศษตกค้างดังกล่าว ด้วยฟังก์ชันค่าหนึ่งซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนัก (Weighted Function) ที่ถูกเลือกไว้ แล้วจึงทำการอินทิเกรตสมการตลอดทั้งโดเมนของปัญหา โดยกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ วิธีนี้ สามารถใช้ได้กับปัญหาทุกประเภท จึงได้รับความนิยมสูงในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

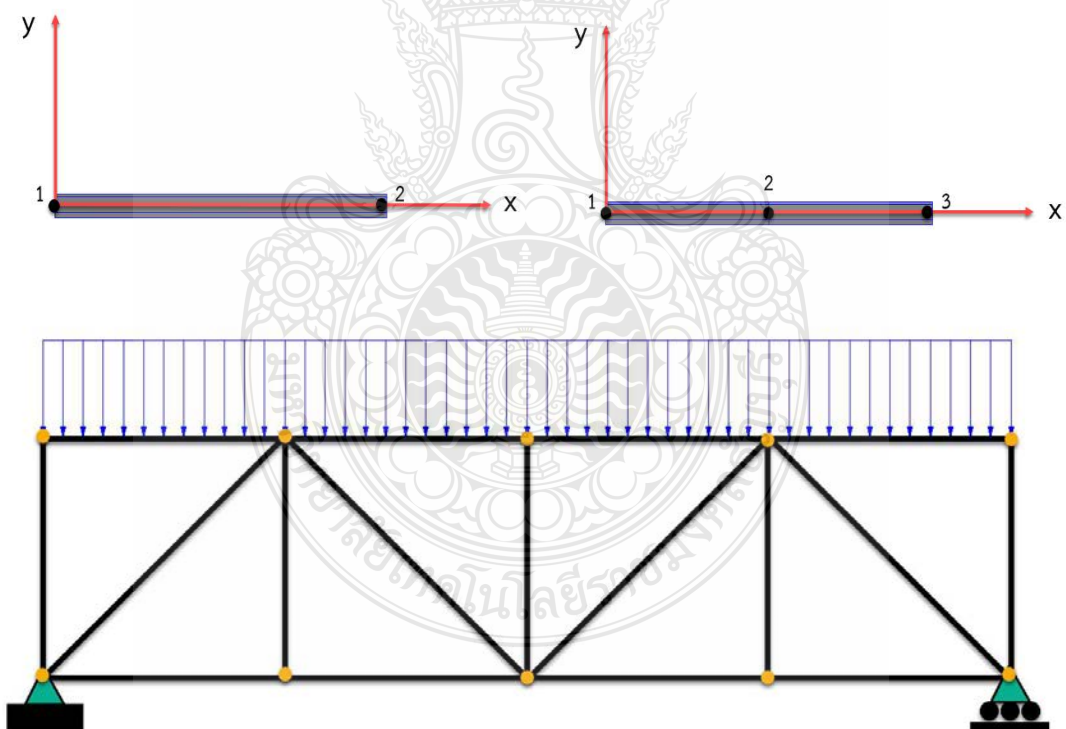
วิธีที่สอง ระเบียบวิธีแปรผัน (Variational Method) สามารถเรียกอีกอย่างหนึ่งได้ว่า วิธีของพลังงาน (Energy Methods) เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและเชื่อถือได้วิธีหนึ่งในการวิเคราะห์โครงสร้าง และสามารถถูกอ้างอิงถึงด้วยหลาย ๆ ชื่อด้วยกัน ได้แก่ Castigliano's theorems, Principal of Minimum Potential Energy, Principal of Minimum Complementary Potential Energy, Unit Load Method และ Rayleigh-Ritz Method ทั้งหมดนี้จัดว่าเป็นวิธีของพลังงานทั้งสิ้น วิธีนี้ ง่ายกว่าวิธีเศษถ่วงน้ำหนักตกค้างสำหรับการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งในแบบสองและสามมิติ ข้อจำกัดเพียงประการเดียวของการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีนี้คือ ต้องทราบค่าของฟังก์ชันนอล (functional) เสียก่อน เทอม ฟังก์ชันนอล หมายถึง สมการครอบคลุมปัญหา (Governing equation) ที่ถูกแสดงอยู่ในรูปของเครื่องหมายอินทิเกรตสำหรับปัญหาเจาะจงเฉพาะนั้น ๆ ในบางครั้ง ปัญหาที่กำลังสนใจอยู่นั้น อาจไม่สามารถหารูปสมการที่เป็นฟังก์ชันนอลของสมการครอบคลุมปัญหาได้ จึงไม่สามารถใช้วิธีนี้ได้นั่นเอง

2.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น สามารถสรุปได้ต่อไปนี้

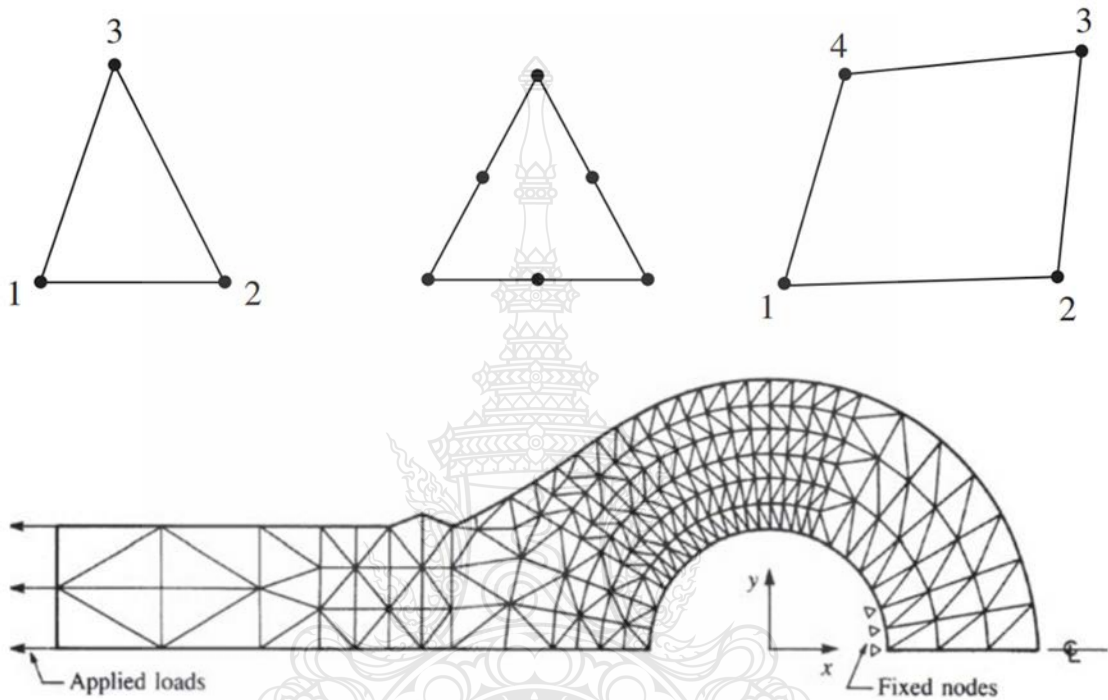
2.3.1 การแบ่งโดเมนและเลือกชนิดของเอลิเมนต์ (Discretization and selection of element types)

การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์และทำการเลือกเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพของปัญหาที่กำลังวิเคราะห์ ขนาดของเอลิเมนต์ที่เลือกนั้น จะต้องมีความถี่ที่เล็กพอที่จะสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องเหมาะสม ในขณะที่เดียวกันก็ต้องมีความถี่ใหญ่พอที่จะไม่ทำให้เวลาในการวิเคราะห์มากเกินไปด้วยนั่นเอง การเลือกประเภทของเอลิเมนต์นั้น ขึ้นโดยตรงว่าเป็นปัญหาในหนึ่ง สองหรือสามมิติ เอลิเมนต์ชั้นพื้นฐานในหนึ่งมิติมีอยู่ 2 แบบได้แก่ เอลิเมนต์แบบแท่งและแบบคาน (Bar and Beam elements) เอลิเมนต์แบบนี้ นิยมใช้สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของโครงถักและโครงข้อแข็ง ดังแสดงในรูปที่ 8

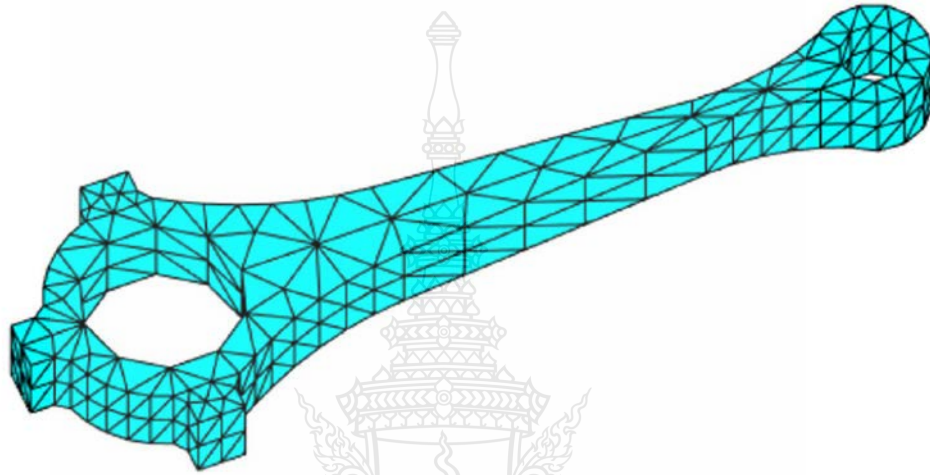
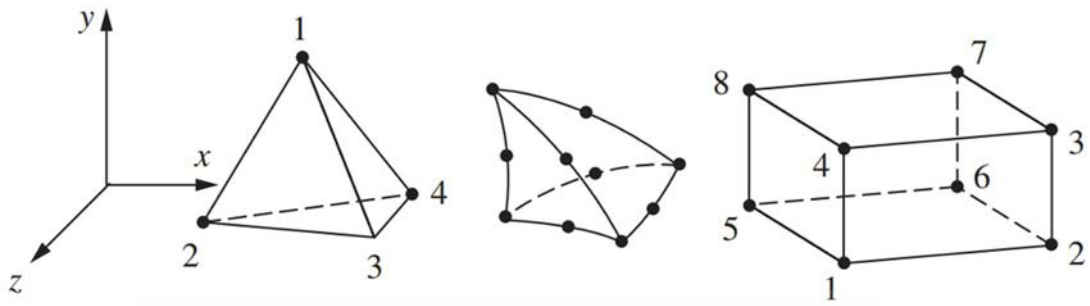


รูปที่ 8 เอลิเมนต์แบบแท่ง

สำหรับปัญหาความเค้นหรือความเครียดในระนาบ 2 มิติ เอลิเมนต์พื้นฐานสำหรับปัญหาดังกล่าว จะมีรูปร่างเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม เอลิเมนต์อย่างง่ายที่สุด เรียกว่า เอลิเมนต์เชิงเส้นรูปสามเหลี่ยม (Linear triangular element) และเอลิเมนต์เชิงเส้นคู่รูปสี่เหลี่ยม (Bilinear quadrilateral element) ดังแสดงในรูปที่ 9 ส่วนปัญหาใน 3 มิตินั้น เอลิเมนต์พื้นฐานจะเป็นรูปทรงสามมิติ 4 หน้า (Tetrahedral element) หรือทรง 6 หน้า (Hexahedral element) ดังรูปที่ 10



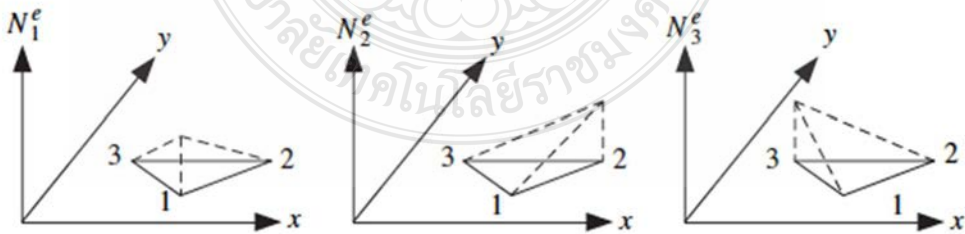
รูปที่ 9 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมใน 2 มิติ [14]



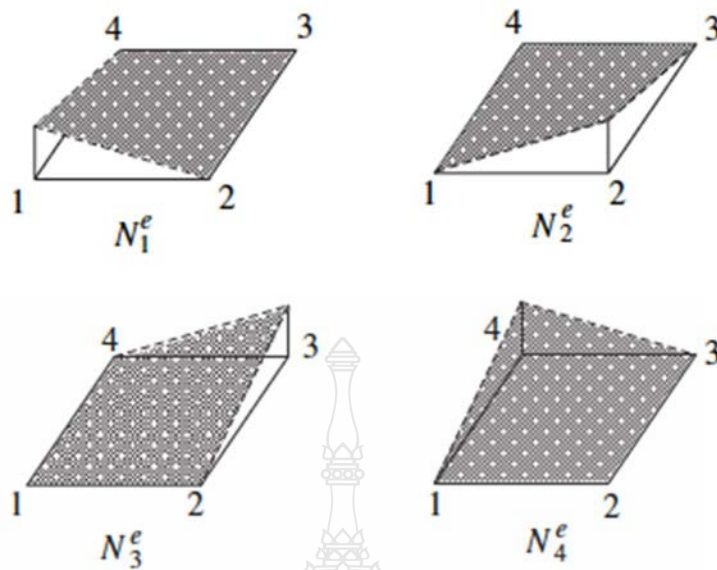
รูปที่ 10 เอลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติ [20]

2.3.2 การเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนตำแหน่ง (Select displacement functions)

เป็นขั้นตอนของการเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนตำแหน่งภายในเอลิเมนต์ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ถูกระบุโดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่โหนดของเอลิเมนต์นั่นเอง ฟังก์ชันนี้ อาจอยู่ในรูปของโพลีโนเมียลลำดับต่าง ๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนของโหนดที่ใช้ในเอลิเมนต์นั้น ๆ โพลีโนเมียลอย่างง่ายแบบเชิงเส้นสำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม แสดงได้ดังรูปที่ 11 และ 12 ตามลำดับ



รูปที่ 11 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม [17]



รูปที่ 12 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม [17]

2.3.3 การกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งและความเค้น-ความเครียด (Define strain-displacement and stress-strain relationships)

สร้างสมการความสัมพันธ์ของความเค้น-การเปลี่ยนตำแหน่งและสมการความเค้น-ความเครียด ขั้นตอนการสร้างสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ ได้กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ 2.1.2

2.3.4 การสร้างสมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ (Derive element stiffness and equations)

เป็นขั้นตอนของการสร้างสมการสติฟเนสในระดับเอลิเมนต์ โดยเป็นขั้นตอนของการหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้น ณ จุดต่อของชิ้นส่วนกับการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อของมัน โดยอาศัยความสัมพันธ์ในหัวข้อที่ 2.3.3 สมการสติฟเนสของเอลิเมนต์ในรูปของเมทริกซ์อย่างย่อเขียนได้ว่า

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (14)$$

เมื่อ $\{f\}$ คือเวกเตอร์ของแรงที่จุดต่อของเอลิเมนต์ $[k]$ คือสติฟเนสของเอลิเมนต์ในรูปของเมทริกซ์ โดยทั่วไป จะมีคุณสมบัติความสมมาตรของเมทริกซ์ และ $\{d\}$ คือเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อของเอลิเมนต์

2.3.5 ขั้นตอนการรวมกันสติฟเนส (Stiffness assembly process)

เป็นขั้นตอนของการนำสมการสติฟเนสของแต่ละเอลิเมนต์มารวมกันพร้อมกันนั้น ก็ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ให้กับปัญหาเพื่อป้องกันการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง ขั้นตอนนี้ จะทำให้ได้สติฟเนสรวมของระบบ (Global stiffness matrix) สมการสติฟเนสรวมของระบบนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์อย่างย่อได้เป็น

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (15)$$

เมื่อ $\{F\}$ คือเวกเตอร์ของแรงที่จุดต่อของทุกเอลิเมนต์ในระบบโคออร์ดิเนตหลัก (Global coordinate system) $[K]$ คือสติฟเนสเมทริกซ์รวมของระบบในรูปของเมทริกซ์สมมาตร และ $\{d\}$ คือเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อทั้งหมดในระบบโคออร์ดิเนตหลักเช่นเดียวกันนั่นเอง

2.3.6 การแก้ระบบสมการ (Equation system solving)

ทำการแก้สมการระบบสมการเชิงเส้นที่ 15 เพื่อหาค่าของตัวแปร ในที่นี้คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของโหนดทั้งหมด ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่านั่นเอง

2.3.7 การประเมินค่าความเค้น และความเครียด (Stresses and Strains Evaluation)

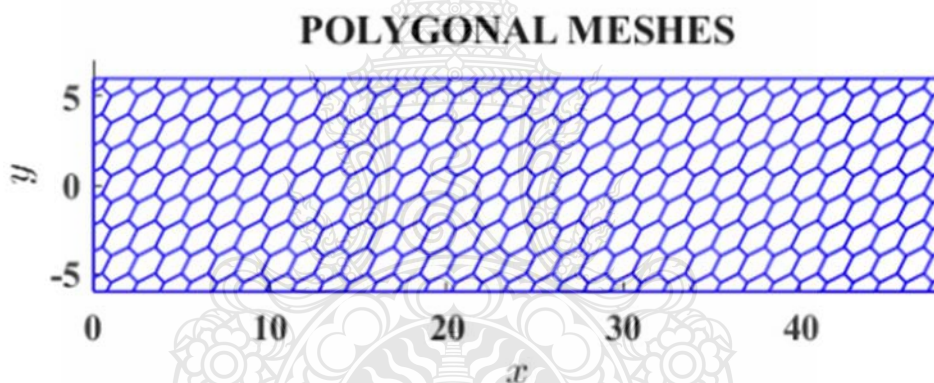
เมื่อทราบค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุดต่อของเอลิเมนต์ทั้งหมดแล้ว ก็สามารถคำนวณเพื่อหาค่าของความเครียดและความเค้นของแต่ละเอลิเมนต์ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งและสมการความเค้นความเครียดได้ต่อไป

2.3.8 ขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ (Post-Processing)

ขั้นตอนสุดท้ายนี้ เป็นขั้นตอนของการแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ทั้งหมด ได้แก่ ความเค้น ความเครียด การเปลี่ยนตำแหน่ง แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ฯลฯ เป็นต้น โดยส่วนใหญ่ จะทำการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ออกมาในรูปของตัวเลขหรือกราฟฟิก เพื่อความสวยงามและง่ายต่อการนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

2.4 สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบแบ่งโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลัก (Cell-based Smoothed Finite Element Method, CS-FEM)

การแบ่งเอลิเมนต์หลักออกเป็นโดเมนหลายโดเมนนั้น ไม่ได้จำกัดอยู่เพียงแค่เอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมเชิงเส้นคู่เท่านั้น แต่ยังสามารถที่จะนำไปใช้ในการแบ่งโดเมนสำหรับเอลิเมนต์หลักที่เป็นแบบหลายเหลี่ยม (Polygonal element) ดังแสดงในรูปที่ 13 เรียกโดยทั่วไปว่าสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม (n-Sided polygonal cell-based smoothed finite element, nCS-FEM) ได้เช่นเดียวกัน ในกรณีนี้ โดเมนของปัญหาที่ศึกษาอยู่ Ω จะถูกแบ่งย่อยออกเป็นเอลิเมนต์หลักที่มีด้านหลายเหลี่ยมจำนวนทั้งสิ้นและมีจำนวนของจุดต่อหรือโหนดเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์นั่นเอง โดยหลักที่สำคัญของการสร้างเอลิเมนต์เหล่านั้น ยังคงเหมือนกันกับการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปสี่เหลี่ยม กล่าวคือ จะต้องไม่มีการทับซ้อนกันหรือมีช่องว่างระหว่างเอลิเมนต์ นั่นคือ $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} \Omega_i^e$ และ $\Omega_i^e \cap \Omega_j^e = \emptyset, i \neq j$

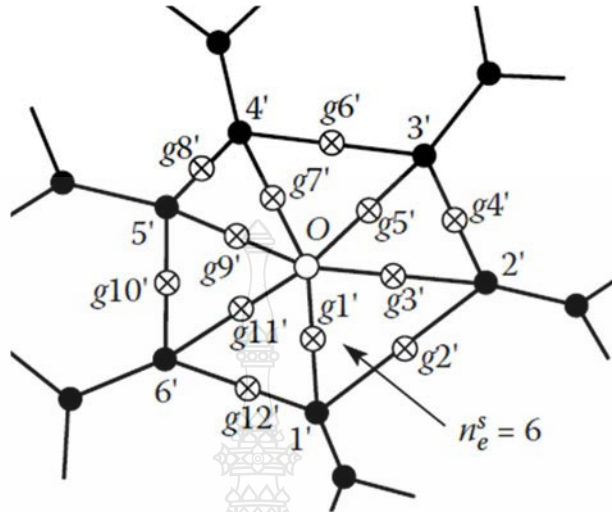


รูปที่ 13 สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้น สามารถถูกแบ่งย่อยออกเป็นโดเมนสม่ำเสมอย่อย ๆ โดยการใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมและมีจำนวนของโดเมนสม่ำเสมอเท่ากับจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมหรือแบ่งออกเป็นโดเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมซ้ำอีกครั้งก็ได้ การแบ่งลักษณะเช่นนี้ จะทำให้ได้โดเมนย่อยสม่ำเสมอซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง ความจริงข้อนี้ ถือได้ว่า เป็น หัวใจสำคัญข้อหนึ่งของหลักการสร้างเอลิเมนต์หรือโดเมนย่อยสม่ำเสมอภายในเอลิเมนต์หลักที่จะต้องมีความน้อยอย่างน้อยเท่ากับ $2n/3$ เมื่อ n คือจำนวนของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของโหนดทั้งหมดนั่นเอง [19]

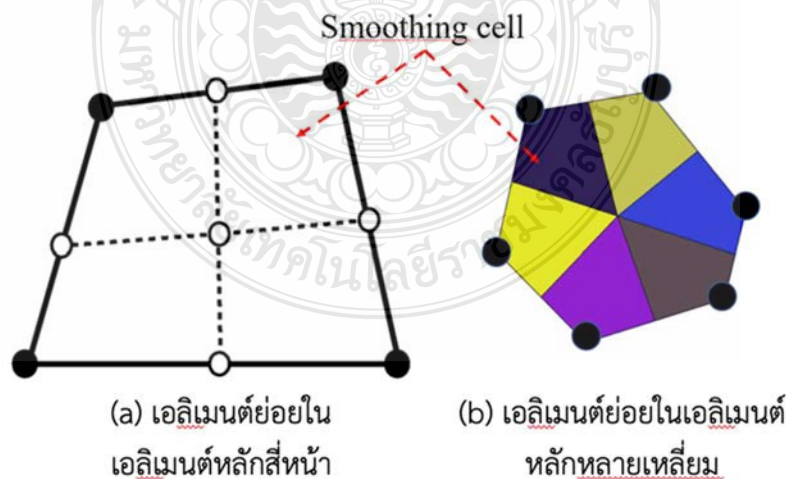
การแบ่งโดเมนสม่ำเสมอ (Smoothing domain/cell) แบบแรก ใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในการแบ่ง เริ่มจากการหาตำแหน่งของจุดเซ็นทรอยด์ของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมก่อน

จากนั้น จึงทำการสร้างเส้นเชื่อมต่อระหว่างโหนดต่าง ๆ ของเอลิเมนต์หลายเหลี่ยมกับจุดเซ็นทรอยด์นั้น ก็จะได้เอลิเมนต์หรือโดเมนย่อยรูปสามเหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 14



รูปที่ 14 การแบ่งเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมออกเป็นโดเมนย่อยสามเหลี่ยม [19]

สำหรับแบบที่สอง ทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังกล่าว ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยสามเหลี่ยม สามารถทำได้ด้วยการกำหนดจุดกึ่งกลางของแต่ละด้านรอบเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยมนั้นเพิ่มภายหลังจากการหาตำแหน่งจุดเซ็นทรอยด์เรียบร้อยแล้ว ทำการสร้างเส้นเชื่อมโยงระหว่างโหนดใดโหนดหนึ่ง ไปยังจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสองซึ่งเชื่อมโยงกับโหนดนั้นแล้วลากเส้นต่อไปยังจุดเซ็นทรอยด์ ทำซ้ำโดยการเปลี่ยนโหนดไปจนกระทั่งครบทุกโหนด ก็จะได้เอลิเมนต์ย่อยสามเหลี่ยมสำหรับเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม ๆ ดังแสดงในรูปที่ 15



รูปที่ 15 การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

2.4.1 การสร้างสมการสติฟเนสหลักของ nCS-FEM

สมการสติฟเนสหลักของระบบสำหรับวิธีการแบ่งโดเมนด้วยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น คล้ายกันกับสมการสติฟเนสหลักของการแบ่งโดเมนด้วยรูปสี่เหลี่ยม กล่าวคือ

$$\bar{\mathbf{K}}^{\text{nCS-FEM}} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (16)$$

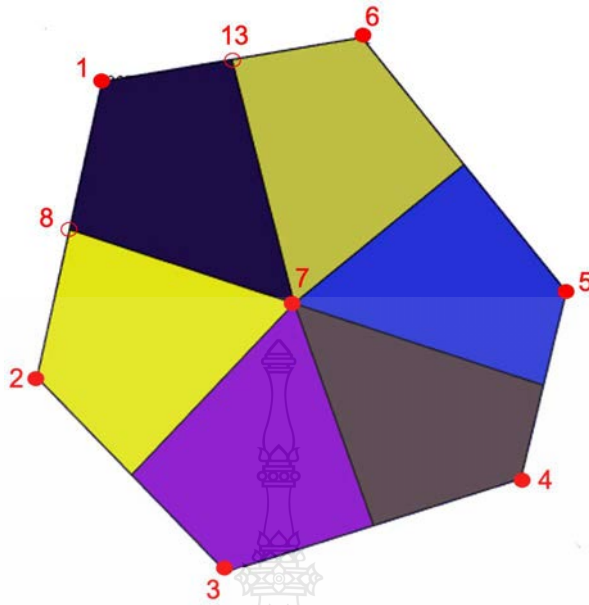
โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{ij}^{\text{nCS-FEM}} &= \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{n_e^s} \int_{\Omega_{i,m}^s} \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}}_j \, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e^s} \int_{\Omega_{i,m}^s} \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}}_j \, A_{i,m}^s \end{aligned} \quad (17)$$

เมื่อ $A_{i,m}^s = \int_{\Omega_{i,m}^e} d\Omega$ คือพื้นที่ของโดเมนสมาชิกสี่เหลี่ยม (Quadrilateral smoothing domain) $\bar{\mathbf{B}}$ คือ เมทริกซ์ความเครียด-การเปลี่ยนตำแหน่งของวิธี SFEM และ $\bar{\mathbf{K}}_{ij}^{\text{nCS-F}}$ คือ สติฟเนสของ SFEM นั้นเอง

2.4.2 การประมาณค่าของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function Evaluation)

จากหลักการของ nCS-FEM ที่ใช้ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องและเป็นเชิงเส้นบนขอบของโดเมนสมาชิกหรือโดเมนต่อเนื่องที่ถูกแบ่งไว้แล้วเหล่านั้น การหาค่าของเมทริกซ์ต่อเนื่องที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Smoothed strain-displacement matrix) $\bar{\mathbf{B}}_I$ ที่แสดงในสมการที่ 16 และ 17 นั้น สามารถทำได้ด้วยการใช้เพียงค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่าง (Shape functions) สำหรับ เอลิเมนต์แท่ง ที่มี 2-node (Linear shape function) ณ จุดกึ่งกลางของด้านที่ประกอบกันเข้าเป็นโดเมนต่อเนื่องได้โดยตรงโดยที่ไม่จำเป็นต้องทำการหาค่าอนุพันธ์ของมัน ซึ่งถือเป็นข้อดีของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะฉะนั้น ในทางปฏิบัติแล้ว การหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับโดเมนย่อยต่อเนื่องแบบเอลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม ณ ตำแหน่งกึ่งกลางด้านหรือตำแหน่งของ Gauss point ดังในรูปที่ 16 นั้น สามารถหาได้ด้วยการประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้น (Linear interpolation) ของค่าฟังก์ชันรูปร่างระหว่างจุดปลายทั้งสองของด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งเป็นที่ตั้งของตำแหน่งของจุด Gauss point นั้นเอง ค่าของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนี้ สามารถหาได้ดังต่อไปนี้ พิจารณารูปที่ 16 ค่าฟังก์ชัน N_1-N_6 มีค่าเท่ากับ 1 ในขณะที่ค่าของฟังก์ชันดังกล่าว มีค่าเท่ากับ 1/6 ณ ตำแหน่งเซ็นทรอยด์ จุด 7



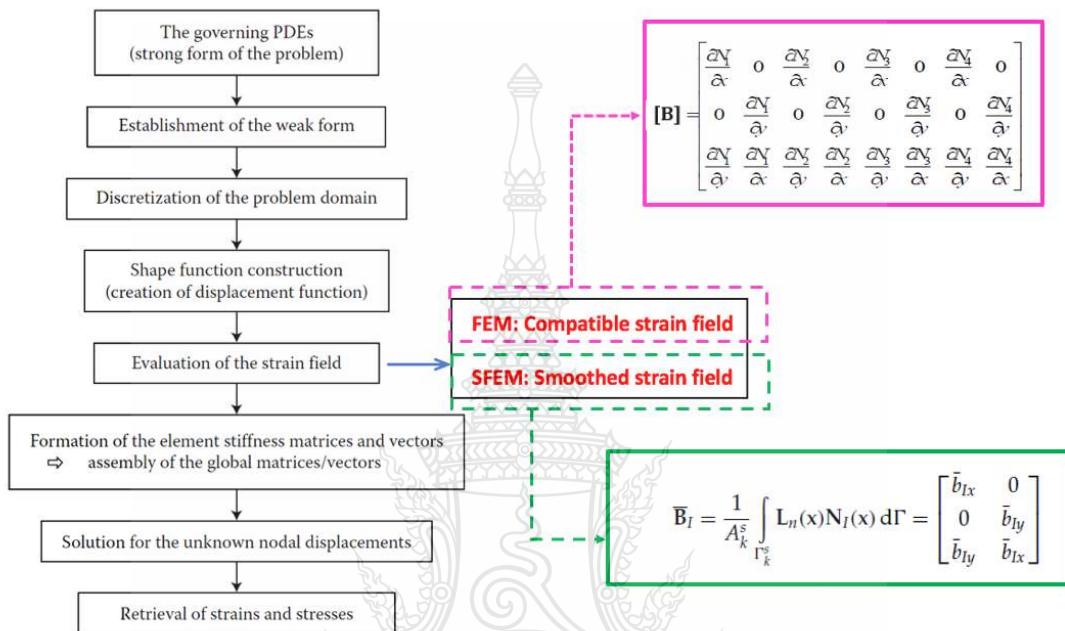
รูปที่ 16 การหาค่าฟังก์ชันรูปร่างของเอลิเมนต์ย่อยรูปสี่เหลี่ยมภายในเอลิเมนต์หลายเหลี่ยม

เมื่อทราบตำแหน่งของ Gauss points ที่ต้องการแล้ว ก็สามารถหาค่าของฟังก์ชันรูปร่างการประมาณภายในดังกล่าวได้อย่างง่ายดาย ตัวอย่างเช่น ค่าของฟังก์ชันรูปร่าง ณ ตำแหน่ง Gauss point 8 ก็ได้มาจากการหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปร่าง ณ จุด 1 และ จุด 2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(1+1)/2 = 1/2$ หรือหากต้องการหาค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในดังกล่าว ณ ตำแหน่งของ Gauss point ซึ่งอยู่กึ่งกลางของด้าน 8-7 ก็สามารถหาได้โดยหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันดังกล่าว ณ จุด 8 กับค่าของฟังก์ชัน ณ จุด 7 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(1/2 + 1/6)/2 = 1/3$ นั่นเอง ค่าของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายใน ณ ตำแหน่งอื่น ๆ ก็ สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันโดยไม่มี ความจำเป็นที่จะต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการประมาณรูปร่างภายในดังกล่าวให้ยุ่งยาก อันจะช่วยลดเวลาของการคำนวณลงได้อย่างมีนัยสำคัญ

2.5 ความแตกต่างระหว่างไฟไนท์เอลิเมนต์กับสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์

สิ่งสำคัญที่ทำให้การวิเคราะห์สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ด้วยการสร้างความเครียดแบบสม่ำเสมอแตกต่างจากวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ คือ การสร้างความเครียดสม่ำเสมอ (smoothed strain field) โดยตรงจากเวกเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งที่สมมุติไว้แล้ว โดยไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อยและขณะเดียวกัน ก็ยังคงมีคุณสมบัติของการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงไม่ด้อยไปกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์เดิม สำหรับขั้นตอนในการวิเคราะห์ส่วนอื่น ๆ ซึ่งได้แก่ การสร้างสมการสติเฟเนสของเอลิเมนต์ การสร้างเวกเตอร์แรงของเอลิเมนต์ การนำเอาทั้งสติเฟเนสและเวกเตอร์แรงในระดับเอลิเมนต์ (Local coordinate system) มาประกอบกันเข้าเป็นสติเฟเนสและเวกเตอร์แรงหลัก (Global coordinate system) ขั้นตอนการ

ประยุกต์สมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) รวมไปถึงขั้นตอนของการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ยังคงมีลักษณะเดียวกันกับที่ใช้ในขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม ทุกประการ รูปที่ 17 แสดงให้เห็นถึงไดอะแกรมของการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์เดิม โดยแสดงให้เห็นถึงส่วนของการสร้างสมการความเครียดที่แตกต่างกันสำหรับสองวิธีดังกล่าว



รูปที่ 17 ความแตกต่างของขั้นตอนการสร้างสมการความเครียดทั้ง 2 วิธี

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape functions) สำหรับเอลิเมนต์ที่มีจำนวนของด้านมากกว่า 4 ด้านนั้น ได้ถูกเสนอขึ้นเป็นครั้งแรกโดย Wachspress [21, 22] โดยอาศัยหลักการของรูปทรงทางเรขาคณิตแบบเพอร์สเปคทีฟ (Principles of perspective geometry) และถูกเรียกว่า “Wachspress shape function” วิธีนี้ได้รับความสนใจอีกครั้งหนึ่งตั้งแต่ ปี ค.ศ.2000 เป็นต้นมา โดยนักวิจัยหลายกลุ่มสำหรับใช้แก้ปัญหาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านซึ่งมีชื่อเรียกที่แตกต่างกันออกไป วิธีเหล่านั้น ได้แก่ Voronoi Cell Finite Element Method (VCFEM), Hybrid Polygonal Element (HPE), n-Sided Polygonal Smoothed Finite Element Method (nSFEM), Mimetic Finite Difference Method (MFDM), Virtual Element Method (VEM), Virtual Node Method (VNM), Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) เป็นต้น

สำหรับวิธีของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (nSFEM) นั้น เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่ถูกสร้างมาจากการการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ (Discretization) นั้น จะถูกทำการแบ่งต่อไปให้เป็นเอลิเมนต์สมำเสมอย่อย ๆ ที่เรียกว่าโดเมนย่อยสมำเสมอ (Smoothing domains) นั้นเอง

วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบแบ่งโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยม (nCSFEM) นั้น มีข้อดีกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์หลายประการ เช่น ความมีเสถียรภาพของมันทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าอันเนื่องมาจากการที่สติฟเนสของมันมีแนวโน้มที่น้อยกว่า (Overly stiff) และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาของวัสดุแบบเกือบจะบีบอัดไม่ได้อย่างร่วมกับเทคนิคที่เรียกว่า Selective integration เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิด Volumetric locking phenomena [23]

Nguyen et al. [24] ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่มีเอลิเมนต์หลักเป็นรูปทรงหลายเหลี่ยม โดยทำการศึกษาการสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอ (Smoothing domains) ทั้ง 3 วิธีสำหรับปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งแล้วพบว่า วิธี การสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอแบบแบ่งตามโหนดของเอลิเมนต์หลักหลายเหลี่ยม (nESFEM) นั้น ให้ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด และยังพบว่า ค่าของสติฟเนส (Stiffness, K) ที่ได้จากวิธีนี้ มีค่าอยู่ระหว่างค่าของสติฟเนสที่ได้จากวิธี สมูทไฟไนท์เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมแบบการสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอภายในเอลิเมนต์หลัก (nCSFEM) และ แบบการสร้างโดเมนย่อยสมำเสมอตามโหนดของเอลิเมนต์หลัก (nNSFEM) นอกจากนี้ Nguyen et al. [25, 26] ยังได้นำเอาเทคนิคของ nESFEM ร่วมกันกับวิธี nNSFEM เพื่อทำการแก้ปัญหาของไหลในการป้องกันการเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า Volumetric locking โดยพบว่า คำตอบที่ได้นั้น มีอัตราของการลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำตรงที่สูงกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์

นักวิจัยหลายกลุ่มพบว่า ผลเฉลยของ nCSFEM ที่ได้จากการประยุกต์ใช้กับปัญหาหลาย ๆ ประเภทนั้น จะให้ค่า Upper bound เมื่อเทียบกับค่าของผลเฉลยแม่นยำตรงของมัน เช่น ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง [24] ปัญหาการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและของแข็ง (Fluid-Solid Interaction, FSI) [26] รวมทั้งปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งของวัสดุยืดหยุ่นที่รับแรงบิด [27] เป็นต้น

นอกจากนี้ Biabanaki et al. [29] ยังได้มีการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์ที่มีด้านมากกว่า 4 ด้านสำหรับการแก้ปัญหาของการเสียรูปอย่างมากของของแข็ง (Large deformation) Biabanaki et al. [30] ยังได้ศึกษาปัญหาของการสัมผัสและชนกัน (Contact-impact problem) เมื่อมีการใช้โครงตาข่ายแบบไม่เข้ากัน (Non-conforming mesh) อีกด้วย ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของการแตกหัก (Fracture Mechanics) ด้วยเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมนั้น ได้ถูกศึกษาโดย Khoei et al. [31] ในขณะที่ Katili et al. [32] ได้ทำการประยุกต์โดยมีการใช้วิธี nCSFEM ร่วมกับ DKMQ [33] เพื่อทำการศึกษาปัญหาของแผ่น (Plate problem) ที่มีคุณสมบัติเป็นแบบ Functionally Graded Material (FGM) เป็นต้น ผลงานวิจัยล่าสุดเกี่ยวกับการศึกษาเรื่อง FSI ของการไหลแบบ Viscous incompressible โดยการใช้การสร้างโครงตาข่ายแบบ Sliding mesh [28] ทำให้สามารถสรุปได้ว่า วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิ

เมมต์รูปหลายเหลี่ยมนี้ มีประสิทธิภาพของการคำนวณสูงกว่าการคำนวณด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญ ที่เป็นเช่นนั้น เนื่องจาก การแบ่งโครงตาข่ายหลักแบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมของปัญหาของไหลออกเป็นโดเมนย่อยสม่าเสมอที่เป็นอิสระต่อกันนั่นเอง



บทที่ 3 วิธีการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เริ่มด้วยการกล่าวถึงสมการครอบคลุม (Governing equation) ปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ (Two-dimensional plane stress problem) ของของแข็งเป็นลำดับแรก ก่อนที่จะอธิบายถึงพื้นฐานที่สำคัญของวิธีสมูทไฟไนท์ (Smooth finite element method, S-FEM) สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งดังกล่าว จากนั้นจึงทำการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเทียบเท่า (N-side polygonal element) ครอบคลุมทั่วทั้งโดเมนของปัญหา ขั้นตอนของการสร้างเอลิเมนต์ย่อยสมูทเหมาะสมรูปทรงสี่หน้า (Quadrilateral element) สำหรับแต่ละเอลิเมนต์หลักทุกเอลิเมนต์ การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติ (Two-dimensional plane stress problem) ที่เหมาะสม อันจะนำไปสู่ขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อนำค่าที่ได้เหล่านั้นไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีซึ่งจะได้กล่าวถึงเป็นหัวข้อสุดท้ายในส่วนนี้

3.1 สมการพื้นฐานวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (Smooth Finite Element Method)

ขั้นตอนการสร้างสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (S-FEM Smooth Finite Element Method) สำหรับการแก้ปัญหาความเค้นของของแข็งในระนาบนั้น สามารถอธิบายโดยสรุปย่อ ดังนี้ เริ่มจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยภายในเอลิเมนต์หลักของปัญหาจะเป็นเอลิเมนต์รูปทรงเหลี่ยมหลายหน้า (Cell-based N-Sides Polygonal Smoothed Finite Element) (อาจหมายถึงเอลิเมนต์แบบรูปสามเหลี่ยมสี่เหลี่ยมด้วย) เช่นเดียวกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิมหรือใช้ขบวนการที่เรียกว่า Delaunay triangulation ก็ได้ สร้างสนามการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement field) และทำการสร้างสนามความเครียดสมูทโดยใช้ค่าของฟังก์ชันการประมาณภายในหรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape functions) โดยอาศัยเทคนิคที่เรียกว่า Strain or Gradient smoothing technique ตลอดทั้งโดเมนย่อยสมูทเสมอ (Arbitrary Smoothing domain) ที่ได้ทำการแบ่งไว้ภายในเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (Cell-based N-Sides Polygonal Smoothed Finite Element) แล้ว สนามความเครียดสมูทนี้ถูกสร้างผ่านการอินทิเกรตของพื้นที่ขอบเขตนั่นเองโดยไม่ต้องทำการ mapping ระหว่าง physical และ parent coordinates โดยที่ขั้นตอนทั้งหมดจากนี้ต่อไปก็เหมือนกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิม

สมการสมดุลสถิตย (Equilibrium Equation) สำหรับปัญหาอีลาสติคที่มีโดเมน Ω และขอบเขต Γ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (18)$$

ร่วมกับสมการเงื่อนไขขอบ $\sigma_{ij}n_j = t_i$ บนขอบเขต Γ_t และ $u_i = \bar{u}_i$ บนขอบเขต Γ_u เมื่อ σ_{ij} , b_i และ n_j คือเทนเซอร์ของความเค้น เวกเตอร์ของแรงเนื่องจากน้ำหนักและเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยตามลำดับ สมการ variational weak form ของมันคือ

$$\int_{\Omega} \delta V(u_{ij}) D_{ijkl} \nabla(u_{kl}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (19)$$

สำหรับสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ โอเปอเรเตอร์สมำเสมอ (Smoothing operator) จะใช้เทคนิคของ Strain/Gradient smoothing กับโดเมนสมำเสมออยู่ภายในเอลิเมนต์หลักด้วยสมการ

$$\tilde{u}(x_s) = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} \nabla u(x) d\Omega \quad (20)$$

โดยที่ A_s คือพื้นที่ของโดเมนสมำเสมอและ $u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i$ นั่นเอง หากนำค่าฟังก์ชันประมาณของการเปลี่ยนตำแหน่งนี้แทนลงในสมการที่ (20) จะทำให้การอินทิเกรตตลอดโดเมนสมำเสมออยู่นั้นเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตบนขอบเขตของโดเมนสมำเสมออยู่นั้น ๆ แทน ดังแสดงในสมการที่ (21)

$$\tilde{u}(x_s) = \frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^n N_i(x) n(x) d\Gamma_i \quad (21)$$

อาศัยโอเปอเรเตอร์สมำเสมอนี้ สนามความเครียดสมำเสมอ (Smoothed strain field) ก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันกับสนามความเครียดแบบเข้ากัน (Compatible strain field) วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แตกต่างกันตรงที่ค่าของ strain-displacement matrix นั่นคือ

$$\tilde{B}_i = \frac{1}{A_s} \int_{\Omega_s} B_i(x) d\Omega \quad (22)$$

เมื่อ \tilde{B}_i และ B_i คือ strain-displacement ของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์และไฟไนท์เอลิเมนต์ตามลำดับ กล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า strain-displacement matrix ของสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ก็คือค่าเฉลี่ยของ strain-displacement matrix ของไฟไนท์เอลิเมนต์ตลอดทั้งโดเมนสมำเสมออยู่นั่นเอง

$$\tilde{B}_i(x_s) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{i1}(x_s) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{i2}(x_s) \\ \tilde{b}_{i2}(x_s) & \tilde{b}_{i1}(x_s) \end{bmatrix} \quad (23)$$

เอลิเมนต์หลักใด ๆ ใน 2 มิติทุกประเภท ไม่ว่าจะเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม หรือรูปหลายเหลี่ยมก็ตาม สามารถพิจารณาได้ว่าเป็นเกิดจากการนำเอาส่วนของเส้นตรงมาประกอบกันเข้าเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ ขอบแต่ละด้านของเอลิเมนต์หลัก จึงถูกพิจารณาว่าเป็นเอลิเมนต์อย่างง่ายคือเอลิเมนต์เส้นตรงที่มี 2 โหนด (2 nodes bar element) เพราะฉะนั้น จึงใช้จุดของเกาส์ (Gauss point) เพียงแค่จุดเดียว ณ ตำแหน่งกึ่งกลางของความยาวขอบนั้น ๆ สำหรับการอินทิเกรต ก็เพียงพอที่จะให้ค่าที่แท้จริงออกมาได้ ดังนั้น สมาชิกของเมทริกในสมการที่ (23) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมได้ดังสมการที่ (24)

$$\tilde{b}_{ik}(x_s) = \sum_{i=1}^n N_i(x_i^{GP}) n_{ik} L_i(k = 1,2) \quad (24)$$

จากสมการสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์(S-FEM Smooth Finite Element Method)ดังกล่าวข้างต้น ทำให้พบว่า ไม่ต้องทำการหาอนุพันธ์ย่อย (Derivatives) ของฟังก์ชันรูปร่างรวมทั้งจาโคเบียนเมทริก (Jacobian Matrix) ถือได้ว่าเป็นข้อดีประการหนึ่งที่เหนือกว่าวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเดิม (FEM Smooth Finite Element Method)

3.2 การสร้างเอลิเมนต์หลักและเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอรูปหลายเหลี่ยม (Element and Cell-based N-Sides Polygonal Smoothed Finite Element)

วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์(S-FEM Smooth Finite Element Method) อาศัยหลักการของการสร้างสนามความเครียดสมำเสมอดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ข้อดีประการหนึ่งของการวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้คือ ทำให้เอลิเมนต์หลักหรือเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอเหล่านั้น เหมือนว่าเป็นเอลิเมนต์ขั้นพื้นฐานอย่างง่ายที่สุด นั่นคือ เอลิเมนต์เส้นตรงที่มีสองโหนด (2-node line element) มาประกอบกันเข้าเป็นเอลิเมนต์หลักดังกล่าว ส่งผลให้มีความยืดหยุ่นในการเลือกใช้งานเอลิเมนต์หลักและเอลิเมนต์ย่อยสมำเสมอที่ประกอบด้วยจำนวนด้านที่มีมากกว่า 4 ด้านได้อย่างง่ายดาย

ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมเริ่มต้นด้วย

1. สร้างเอลิเมนต์หลักรูปสามเหลี่ยม (Triangle Element) ซึ่งสามารถสร้างได้จากการใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์สำเร็จรูปทั่ว ๆ ไป

2. ทำการเปลี่ยนเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมดังกล่าวให้เป็นรูปหลายเหลี่ยมด้วยการหาจุดกึ่งกลางแต่ละด้านของสามเหลี่ยม

3. กำหนดจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยม C1 ถึง C6

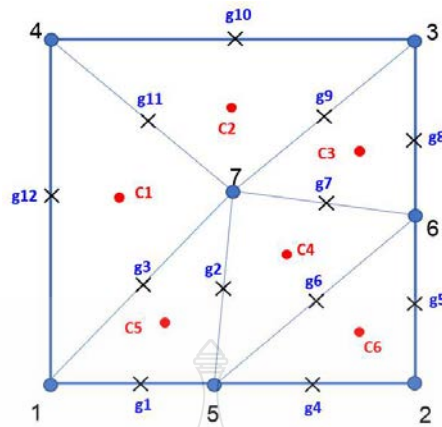
4. ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดเซนทรอยด์เหล่านั้นกับจุดกึ่งกลางแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ได้สร้างไว้จากขั้นตอนที่ผ่านมา ดังแสดงในรูปที่ 19

5. ทำการลบด้านและโหนดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่ภายในออก ยกเว้นด้านและโหนดที่อยู่บนขอบเขตของปัญหา (Boundary Domain)

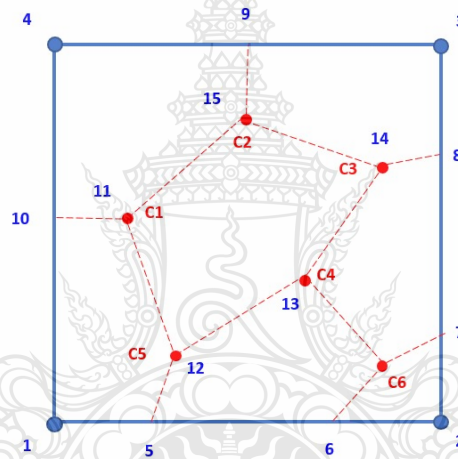
6. ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดเซนทรอยด์ ที่สร้างขึ้นมา C1 ถึง C6 เข้าด้วยกัน

7. ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดเซนทรอยด์กับจุดกึ่งกลางของด้านสามเหลี่ยมที่อยู่บนขอบเขตของปัญหาจะได้เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมดั่งเส้นประสีแดง ดังแสดงในรูป 20

รูปที่ 18 ขั้นตอนการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม

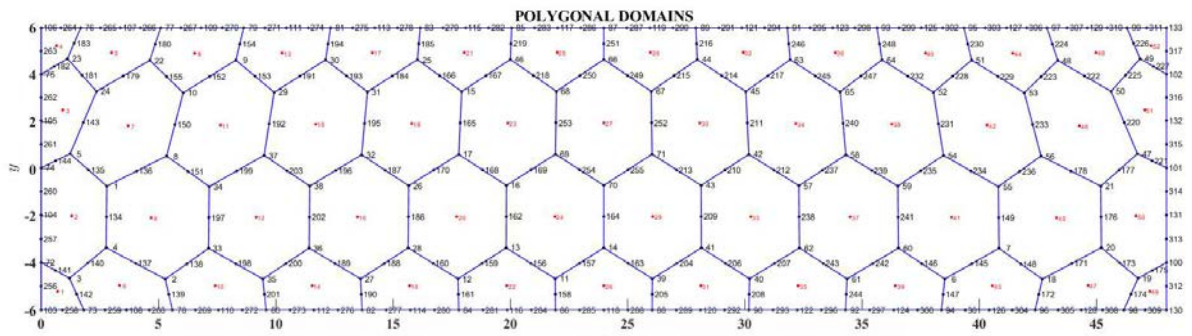


รูปที่ 19 การกำหนดจุดศูนย์กลางและจุดกึ่งกลางด้านของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม



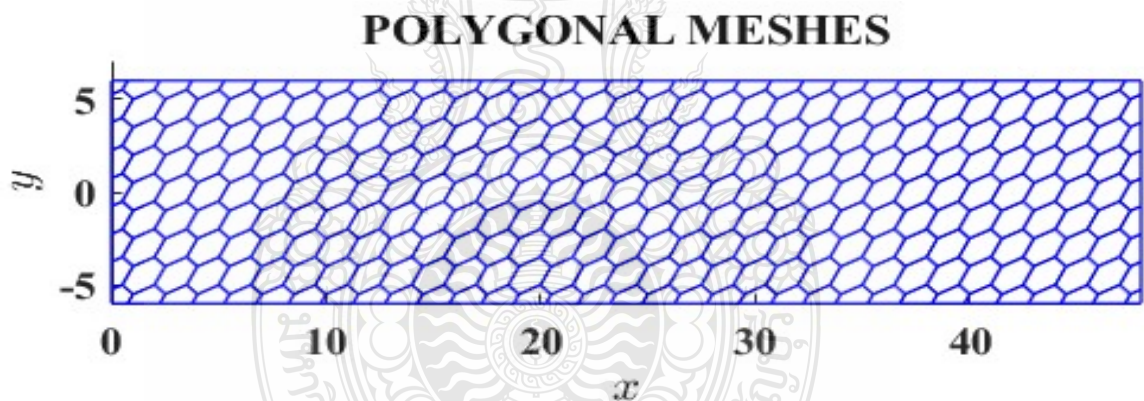
รูปที่ 20 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนที่ 7

เทคนิคของการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (N-Sides Polygonal Element) สำหรับการวิเคราะห์ด้วยสมูทไพไนท์เอลิเมนต์ดังกล่าว อาศัยโปรแกรมการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมที่ถูกเขียนขึ้นมาด้วยโปรแกรม MATLAB ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการวิเคราะห์แก้ไขปัญหา ซึ่งจะใช้สำหรับการสร้างเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับโดเมนปัญหาที่มาจากรูปทรงเรขาคณิตขั้นพื้นฐานได้แก่ เส้นตรง สี่เหลี่ยม วงกลม วงรี และมีรูปทรงไม่สลับซับซ้อนมากนัก [34] ตัวอย่างคานยื่นปลายที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์แบบหลายเหลี่ยม แสดงได้ดังรูปที่ 21



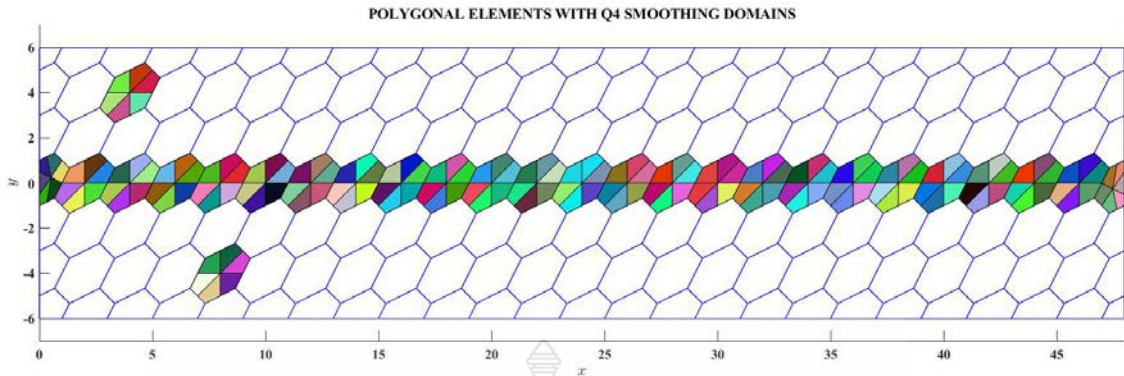
รูปที่ 21 เอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมสำหรับคานตัวอย่าง

ในงานวิจัยครั้งนี้ เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมสำหรับโดเมนของปัญหานั้น ถูกสร้างขึ้นมาจากเอลิเมนต์หลักรูปทรงสี่หน้า (Quadrilateral element) ที่เทียบเท่ากันซึ่งสามารถสร้างได้จากการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปทั่วไป จำนวนความละเอียดของโครงตาข่ายจากหยาบสุดไปจนกระทั่งละเอียดสุด กำหนดให้มีค่าเป็น 16X4, 24X6, 32X8, 40X10 และ 48X12 ตามลำดับ รูปที่ 22 แสดงโครงตาข่ายหลักรูปหลายเหลี่ยมเทียบเท่าที่ได้จากการแปลงเอลิเมนต์หลักรูปทรงสี่หน้าที่โครงตาข่ายขนาด 32X8



รูปที่ 22 เอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยม

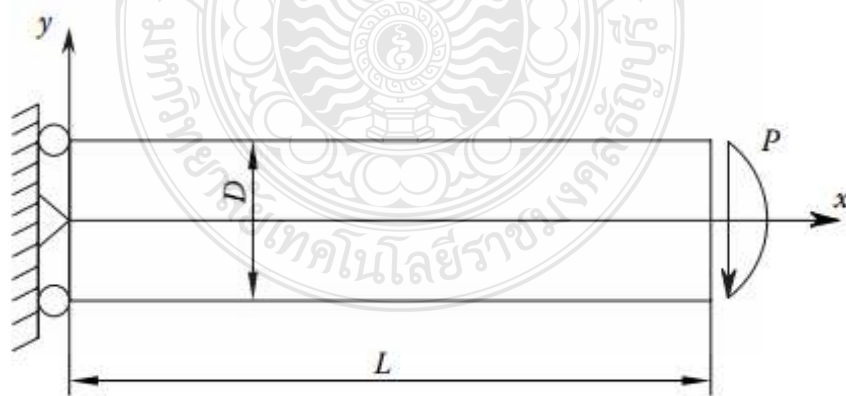
เมื่อคานตัวอย่างได้ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 22 ข้างต้นแล้ว ขั้นตอนต่อไปเป็นการสร้างเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอรูปทรงสี่หน้า(Quadrilateral element) ภายในแต่ละเอลิเมนต์หลัก เอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอเหล่านี้ จะมีจุดยอดร่วมกันที่ตำแหน่งเซนทรอยด์ (barycenter) ของรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง การสร้างเอลิเมนต์ย่อยนี้ ทำได้ด้วยการเชื่อมโยงจุดเซนทรอยด์ของเอลิเมนต์หลักไปยังจุดกึ่งกลางด้านแต่ละด้านเพื่อสร้างรูปทรงสี่หน้าขึ้นมา จำนวนของเอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอนี้ จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนด้านของเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนั่นเอง ลักษณะของเอลิเมนต์ย่อยดังกล่าว แสดงได้ด้วยพื้นที่ในส่วนที่แรเงาเพื่อความชัดเจน ดังแสดงในรูปที่ 23



รูปที่ 23 เอลิเมนต์ย่อยสม่ำเสมอรูปทรงสี่หน้า

3.3 ปัญหาสำหรับการทดสอบ

งานวิจัยนี้ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาในระนาบ 2 มิติ พิจารณาใช้ตัวอย่างของคานยื่นปลาย (Cantilever beam) ความยาว 48 หน่วย ความสูง 12 หน่วย และมีความหนาของคานเท่ากับ 1 หน่วย กำหนดให้ค่าคงที่ของวัสดุคือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุและอัตราส่วนปัวซองมีค่าเท่ากับ 10^6 นิวตันต่อตารางเมตรและ 0.28 ตามลำดับ กรณีตัวอย่างนี้จะกำหนดให้คานยื่นมีฐานรองรับที่ปลายคานด้านซ้าย เป็นยึดหมุน (Hinged support) ที่ระดับกึ่งกลางของความลึก ($D/2$) ให้ขอบด้านบนและด้านล่างเป็น ฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ในแนวดิ่ง (Roller support) เพื่อให้สามารถขยับยึดหรือหดได้อย่างอิสระ สอดคล้องกับค่าอัตราส่วนปัวซอง และในขณะที่ปลายคานด้านขวามีให้มีแรงกระทำในแนวดิ่ง ที่มีการกระจายตัวของแรงเป็นรูปพาราโบลากระทำ 1000 นิวตัน โดยจะพิจารณาว่าตัวอย่างของคานที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้เป็นปัญหาของความเค้นในระนาบสองมิติ ลักษณะของคานยื่นปลายดังกล่าวจะแสดงไว้ในรูปที่ 24



รูปที่ 24 คานยื่นปลายรับแรงเฉือนปลายคาน

ผลเฉลยจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของปัญหาคานยื่นปลายดังกล่าวได้แก่ ค่าของการเคลื่อนที่ทั้งแนวตั้งและแนวนอนนั้น [35] สามารถแสดงในรูปสมการได้คือ

$$\begin{aligned} u_y &= -\frac{P}{6EI} \left[3vy^2(L-x) + (4+5v)\frac{D^2x}{4} + 3x^2L - x^3 \right] \\ u_x &= \frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+v)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

โดยค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของคาน $I = hD^3/12$ เมื่อ h คือ ความหนาของคานตัวอย่างสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบสองมิติมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย

ค่าของความเค้นซึ่งสามารถคำนวณได้เมื่อทราบค่าของการเคลื่อนที่แล้ว สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,y) &= \frac{Py}{I}(L-x) \\ \sigma_{xy}(x,y) &= -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \\ \sigma_{yy}(x,y) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

บทที่ 4 ผลการศึกษาวิเคราะห์

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่จะนำไปใช้เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่วิเคราะห์ได้ทางทฤษฎีได้แก่ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคาน (Tip displacement) ค่าความคลาดเคลื่อนของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (Vertical displacement error norm) ความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) และความเค้นเฉือน (Shear stress) ของหน้าตัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางคาน ผลการศึกษาดังกล่าว มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายคานและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่น่าสนใจของคานยื่นปลายตัวอย่างคือการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ในที่นี้ จะทำการเปรียบเทียบค่าดังกล่าวที่ทุก ๆ ตำแหน่งของโหนดที่ขอบล่างของคานตลอดทั้งความยาว 48 เมตรของคานตัวอย่าง ค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีตามสมการที่ 25 ละเอียดถึงทศนิยมตำแหน่งที่ห้า มีค่าเท่ากับ 0.02665 เมตร ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (U_{norm}) สามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 27 คือ

$$U_{norm} = \frac{\|U_{exact} - U_{analysis}\|}{\|U_{exact}\|} \quad (27)$$

เมื่อ U_{exact} และ $U_{analysis}$ คือเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง ที่ได้จากทางทฤษฎีและจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical analysis) ตามลำดับ

ตารางที่ 1 แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานสำหรับกรวิเคราะห์ด้วยไฟไนท์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (FEM-T3) และเอลิเมนต์ทรงหน้า (FEM-Q4) ในแถวที่ 2 และ 3 ส่วนแถวที่ 4 เป็นค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่มีเอลิเมนต์หลักเป็นรูปหลายเหลี่ยม (nCSFEM-Q4) โดยมีเอลิเมนต์สมำเสมออยู่เป็นเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า สำหรับเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎีซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.02665 เมตร

ตารางที่ 1 การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้ง (เมตร)

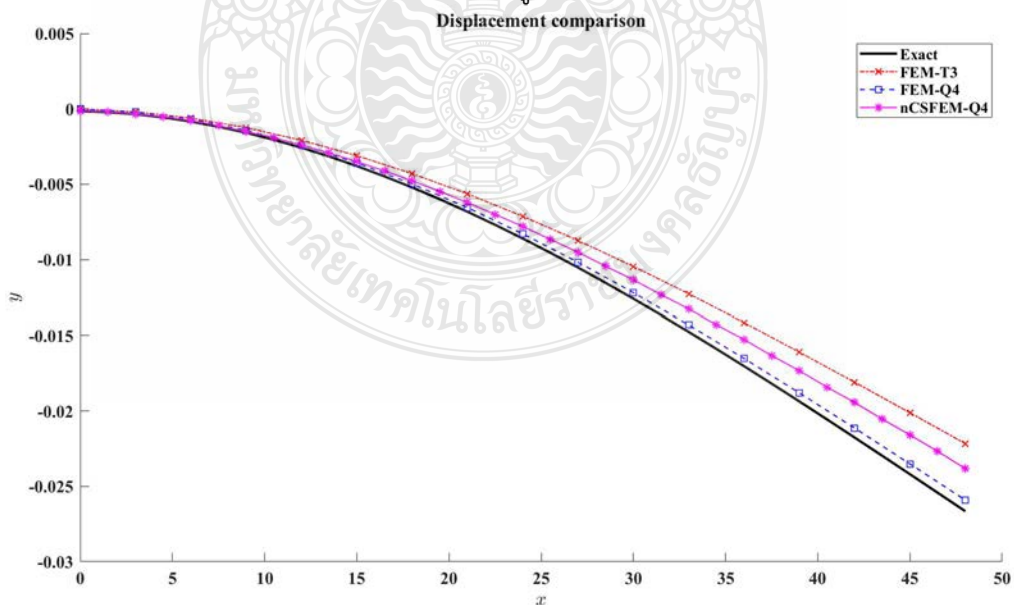
Method	Vertical displacement (m)				
	Mesh	Mesh	Mesh	Mesh	Mesh
	16X4	24X6	32X8	40X10	48X12
Exact Sol.	0.02665	0.02665	0.02665	0.02665	0.02665
FEM-T3	0.02216	0.02443	0.02535	0.02580	0.02601
FEM-Q4	0.02590	0.02631	0.02646	0.02652	0.02660
nCSFEM	0.02408	0.02551	0.02612	0.02630	0.02663

สำหรับโครงตาข่ายทุกขนาดที่ใช้ในงานครั้งนี้พบว่า ค่าที่ได้จากการใช้วิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ นั้น มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยทางทฤษฎีมากกว่าการใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ T3 แต่อย่างน้อยก็เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ Q4 ยกเว้นค่าที่ได้จากโครงตาข่ายที่มีความละเอียดมากที่สุดที่ 48X12 ซึ่งพบว่าค่าที่ได้จากสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้น เข้าใกล้ค่าจากทางทฤษฎีมากที่สุด ความแตกต่างระหว่างค่าที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับค่าทางทฤษฎีสำหรับวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์นั้นมีแนวโน้มลดลงตามขนาดของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติ

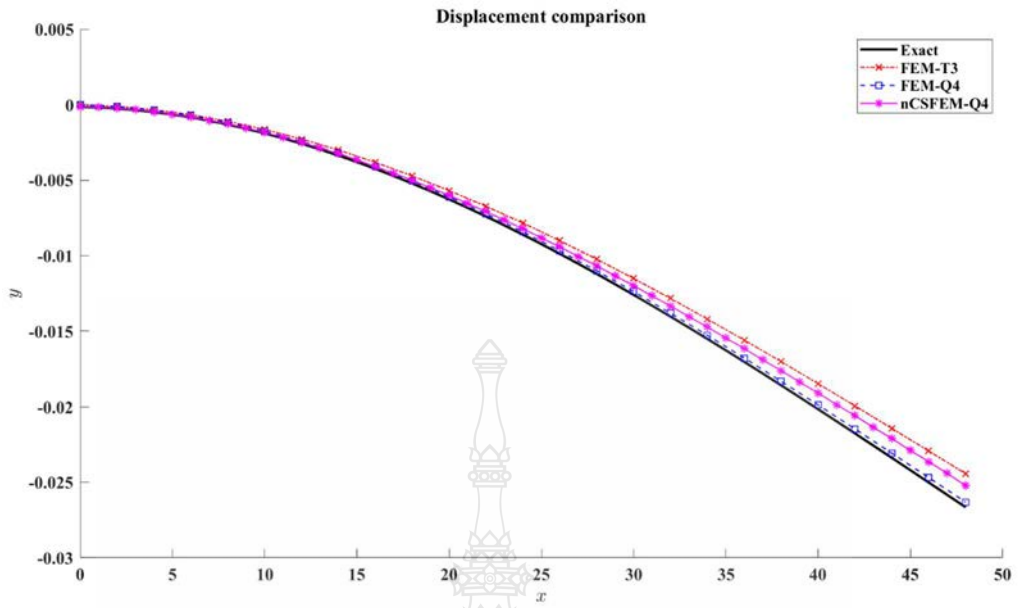
ตารางที่ 2 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคาน (เมตร)

Method	Vertical tip displacement error norm (m)				
	Mesh 16X4	Mesh 24X6	Mesh 32X8	Mesh 40X10	Mesh 48X12
Exact Sol.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
FEM-T3	0.16848	0.08330	0.04878	0.03189	0.02402
FEM-Q4	0.02814	0.01276	0.00713	0.00488	0.00188
nCSFEM	0.09644	0.04278	0.01989	0.01313	0.00075

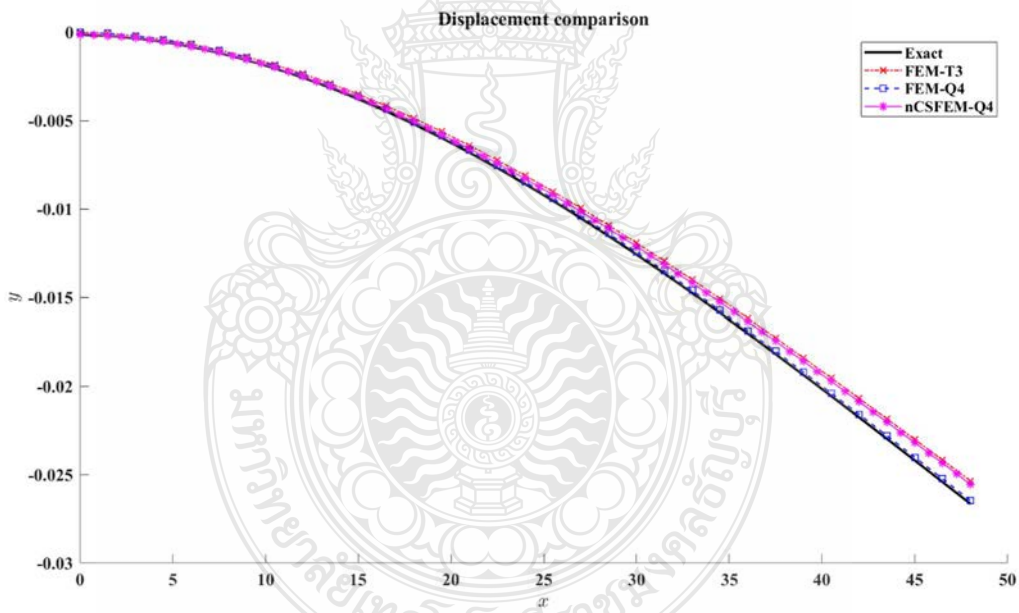
สำหรับตารางที่ 2 ซึ่งแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Error norm) ของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งที่ปลายคานสำหรับโครงตาข่ายขนาดต่าง ๆ กันนั้น พบว่า มีแนวโน้มเช่นเดียวกัน กล่าวคือ เมื่อขนาดของโครงตาข่ายมีความละเอียดมากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานก็มีค่าลดลงตามไปด้วย โดยค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์มีค่าดีกว่าไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ Q4 ที่โครงตาข่ายขนาด 16X4, 24X6, 32X8, 40X10 และ 48X12 ดังรูปที่ 25-29



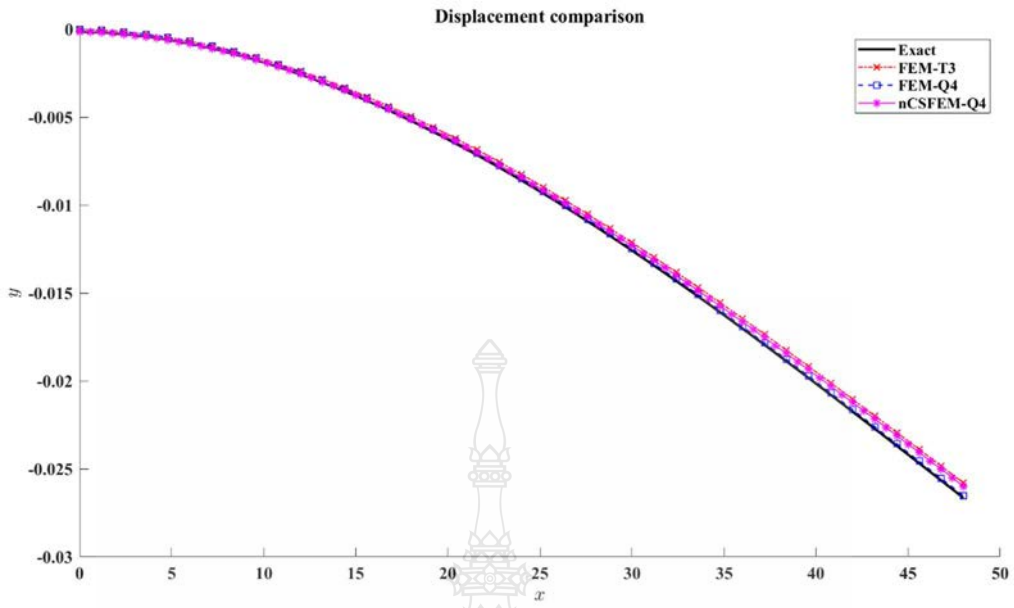
รูปที่ 25 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตั้งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 16X4



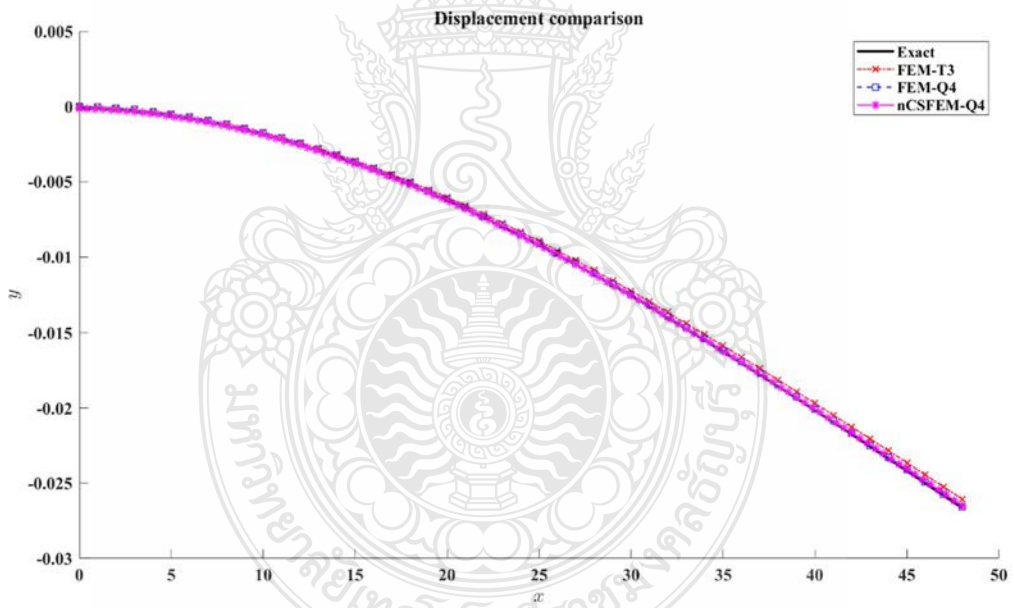
รูปที่ 26 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 24X6



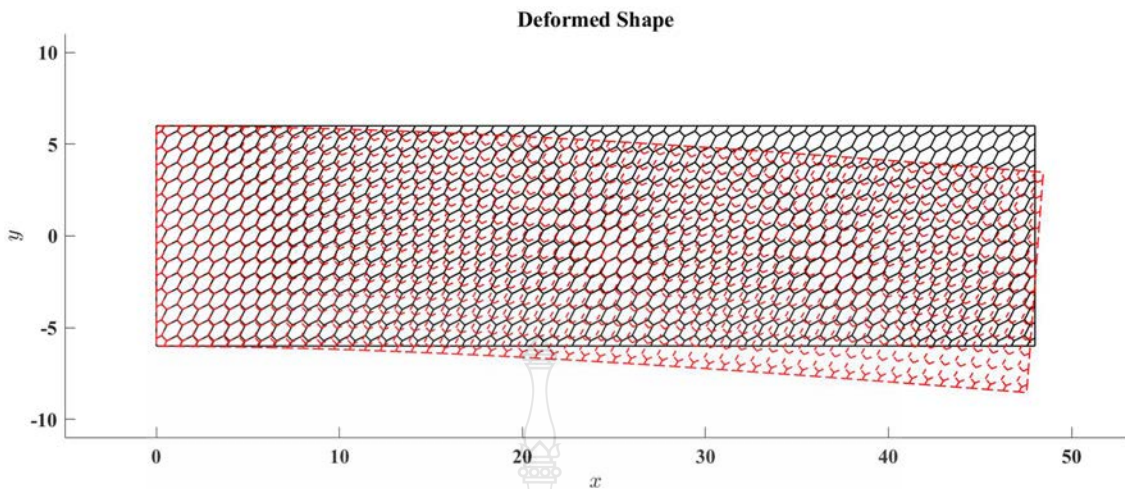
รูปที่ 27 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 32X8



รูปที่ 28 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 40X10



รูปที่ 29 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 48X12

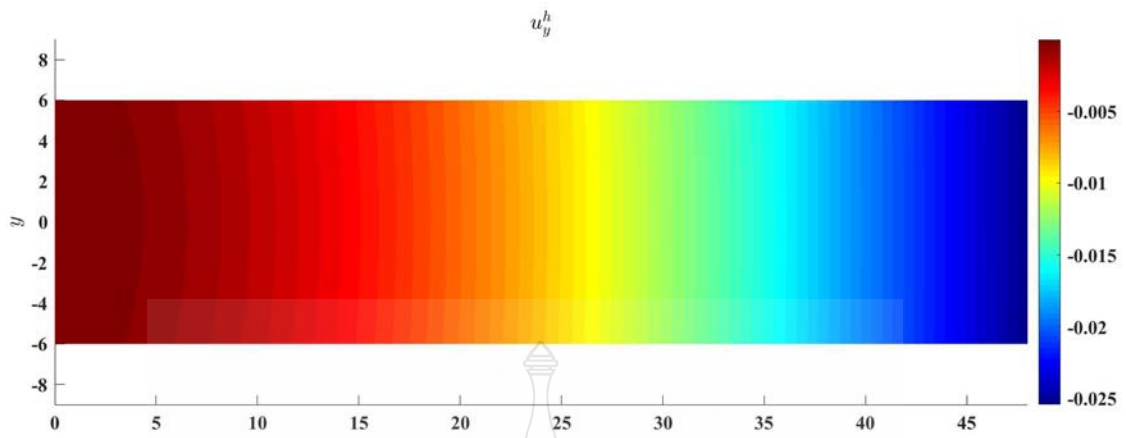


รูปที่ 30 แบบจำลองการเสียรูปในแนวดิ่งตลอดความยาวคานที่โครงตาข่าย 48X12

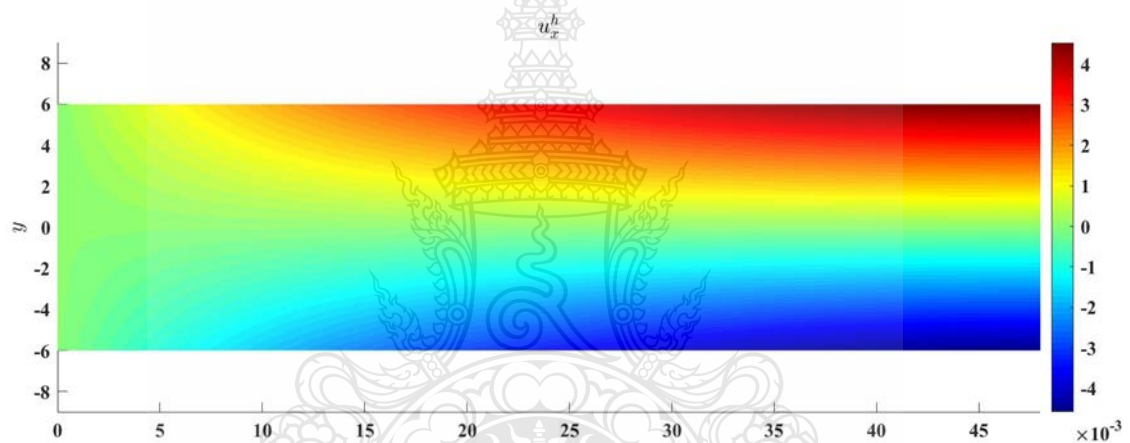
สำหรับรูปที่ 25 นั้น แสดงค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งของทั้งสามวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเมื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎีสำหรับความละเอียดโครงตาข่ายต่ำสุดที่ 16X4 พบว่า ค่าที่ได้จากทั้งสามวิธีนั้น ให้ค่าความแม่นยำที่ใกล้เคียงกัน โดยค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (nCSFEM-Q4) นั้นมีค่าอยู่ระหว่างสองวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ปกติ เมื่อความละเอียดของโครงตาข่ายมีขนาดเพิ่มขึ้นจนกระทั่งสูงสุดที่ 48X12 ดังแสดงในรูปที่ 29 นั้น พบว่าวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (nCSFEM-Q4) มีความแม่นยำในการคำนวณเท่ากันหรือไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญกับวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ Q4 นั้นเอง ในขณะที่ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ T3 (FEM-T3) นั้น พบว่า มีความแม่นยำน้อยกว่าทั้งสองวิธีสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบครั้งนี้ ดังนั้น สำหรับการวิเคราะห์ผลที่ได้ต่อไปจากนี้ จะเป็นการเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยม (nCSFEM-Q4) กับผลที่ได้จากทางทฤษฎีโดยตรงเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ส่วนรูปที่ 30 แสดงให้เห็นถึงรูปร่างที่เปลี่ยนแปลงไป (Deform Shape) ของคานยื่นปลายที่ทำกรวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ที่มีเอลิเมนต์หลักเป็นรูปหลายเหลี่ยม (nCSFEM-Q4) ของแบบจำลองของคานยื่นปลายที่มีการแบ่งโครงตาข่ายละเอียดสูงสุด 48X12 ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่าคานจะมีการเคลื่อนตัวในแนวดิ่งที่บริเวณปลายคานอย่างชัดเจน

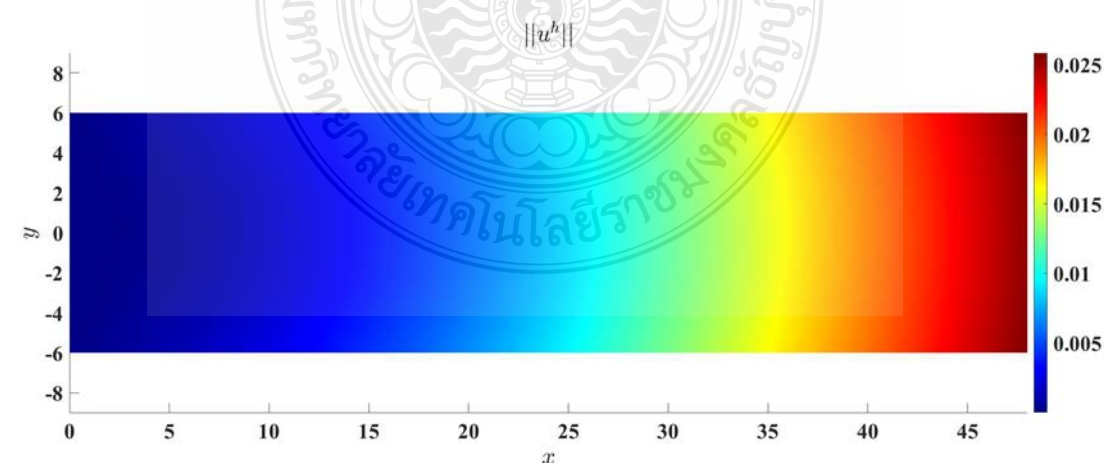
รูปที่ 31-33 แสดงผลของการกระจายตัวของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งตลอดทั่วทั้งโดเมนของปัญหาซึ่งได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์รูปหลายเหลี่ยมในรูปแบบของ Contour Plot



รูปที่ 31 การกระจายตัวของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (โครงตาข่ายขนาด 48X12)



รูปที่ 32 ลักษณะการกระจายตัวค่าการเคลื่อนที่ในแนวราบ (โครงตาข่ายขนาด 48X12)

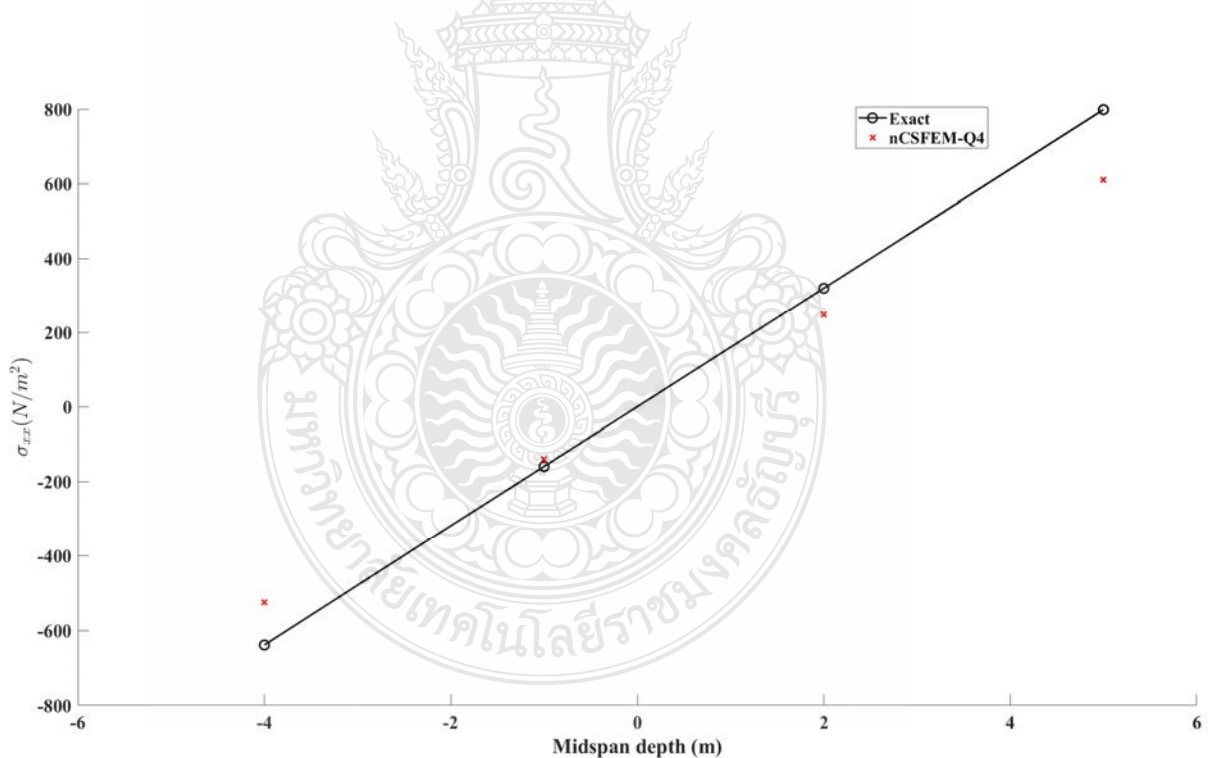


รูปที่ 33 การกระจายตัวค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (โครงตาข่ายขนาด 48X12) ปรับสเกลแกน Y

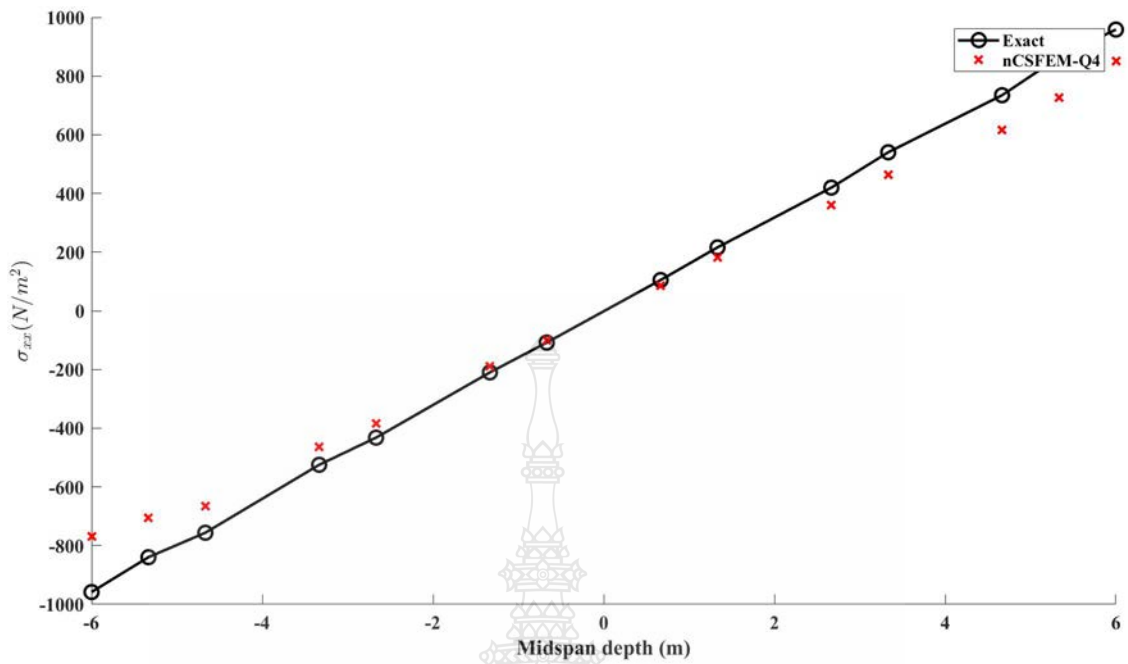
4.2 ความเค้นตั้งฉาก (Normal stress)

สำหรับกรณีศึกษา นี้ จะใช้ความเค้นตั้งฉากที่ได้จากการวิเคราะห์บริเวณหน้าตัดกึ่งกลางคาน ตลอดความลึกของคานเทียบกับค่าที่ได้จากทางทฤษฎี ณ ตำแหน่งเดียวกัน ค่าเหล่านั้น ถูกนำมาแสดง ในรูปที่ 34–38 โดยแกนในแนวดิ่งเป็นค่าความเค้นตั้งฉากส่วนแกนในแนวนอนเป็นค่าความลึกของหน้า ตัดคาน พบว่าค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีที่นำเสนอ (แสดงด้วยจุดกากบาท) มีความสอดคล้องกับ ค่าที่ได้จากทางทฤษฎี (แสดงด้วยจุดวงกลม) เป็นอย่างดี จะสังเกตเห็นว่า บริเวณของบนและขอบล่าง ของหน้าตัดคานนั้น ค่าที่ได้โดยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบรูปหลายเหลี่ยมนี้ มีความแตกต่างจากค่า ทางทฤษฎีอยู่บ้างซึ่งความแตกต่างนี้จะมีค่ามากที่สุด ณ ตำแหน่งของโหนดที่บริเวณขอบนอกสุดอัน เนื่องมาจากพื้นที่ซึ่งส่งผลต่อการคำนวณหาค่าความเค้น ณ ตำแหน่งดังกล่าวมีเพียงทิศทางเดียวเมื่อ เทียบกับโหนดในบริเวณอื่น ๆ ซึ่งได้รับอิทธิพลของพื้นที่จากโหนดที่อยู่ข้างเคียงมากกว่านั่นเอง การ กระจายตัวของความเค้นปกติตลอดทั่วทั้งคานยื่นปลายในรูปของ Contour Plot แสดงได้ดังรูปที่ 39

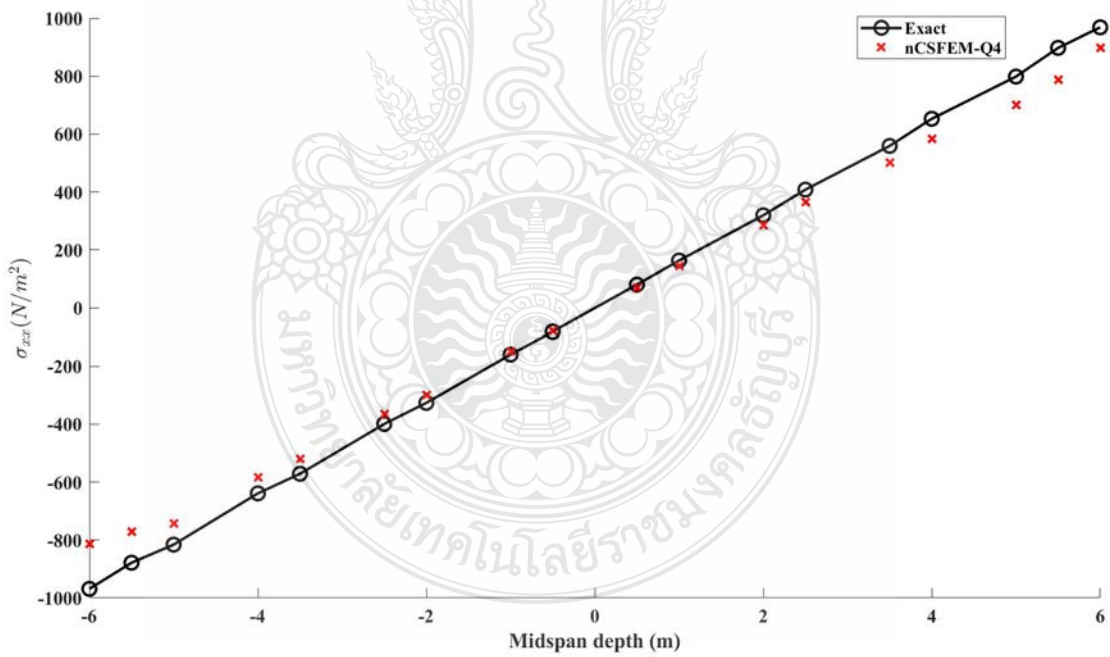
ในส่วนของรูปที่ 40 แสดงให้เห็นการกระจายตัวของความเครียดตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัด บริเวณกึ่งกลางคานตลอดทั่วทั้งคานยื่นปลายในรูปของ Contour Plot เห็นได้ว่าความเครียดตั้งฉากจะ มีค่ามากที่สุดที่บริเวณฐานรองรับแบบเคลื่อนที่ได้ (Roller Support) ด้านบนและด้านล่าง



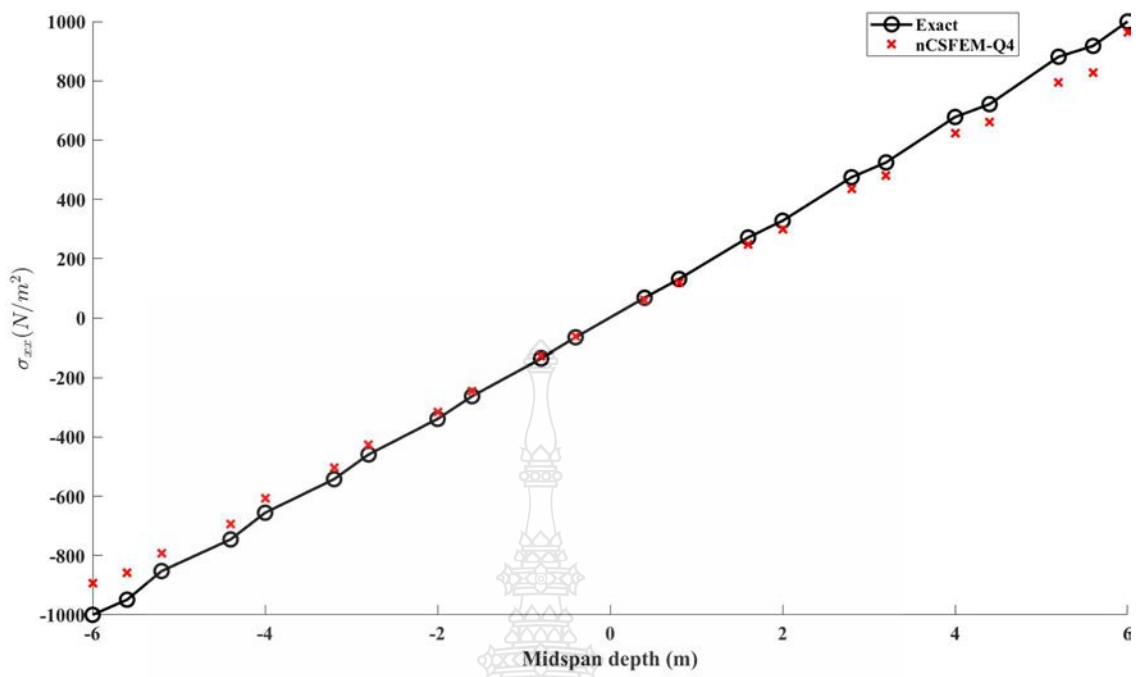
รูปที่ 34 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 16X4 ขยายสเกล แกน X ให้ถึง 6 และ -6



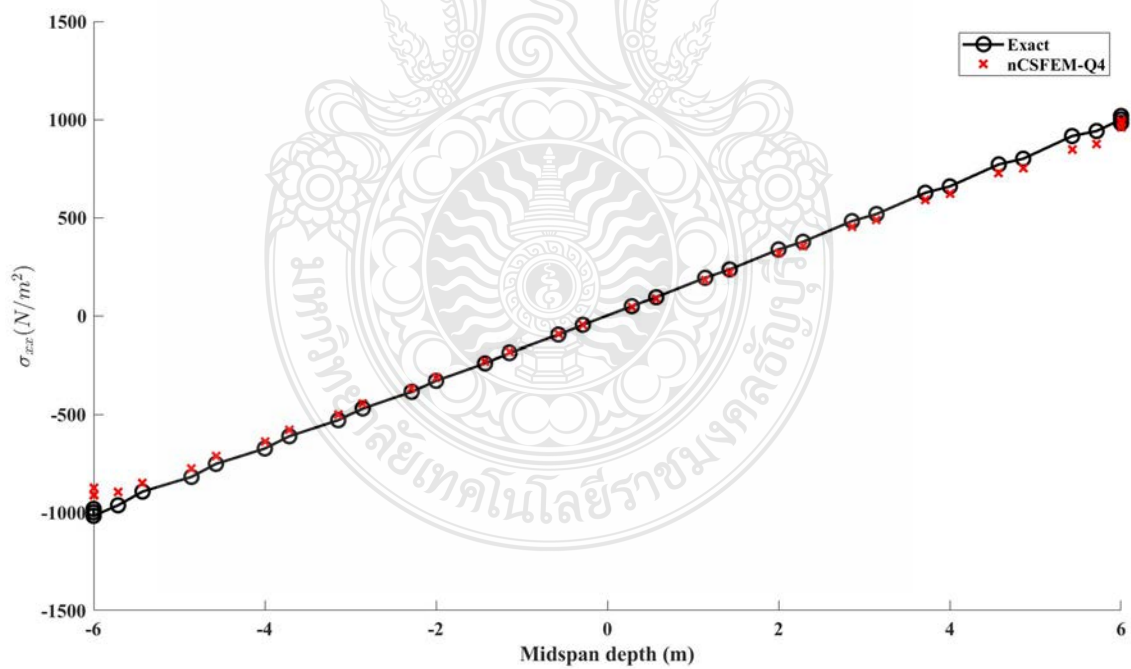
รูปที่ 35 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 24X6



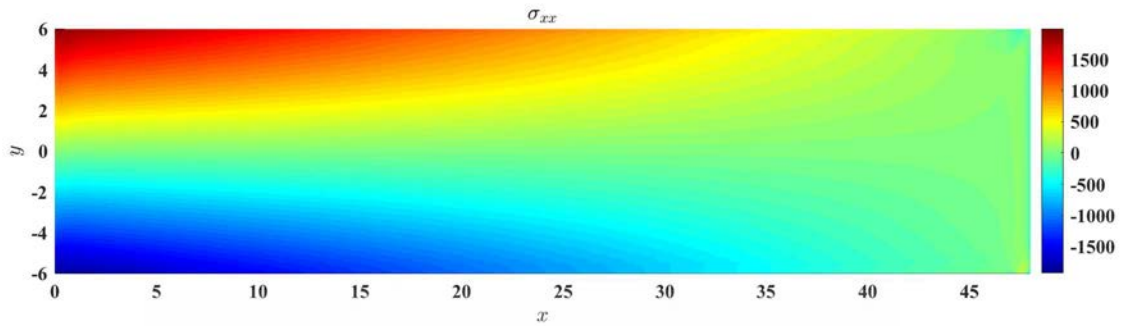
รูปที่ 36 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 32X8



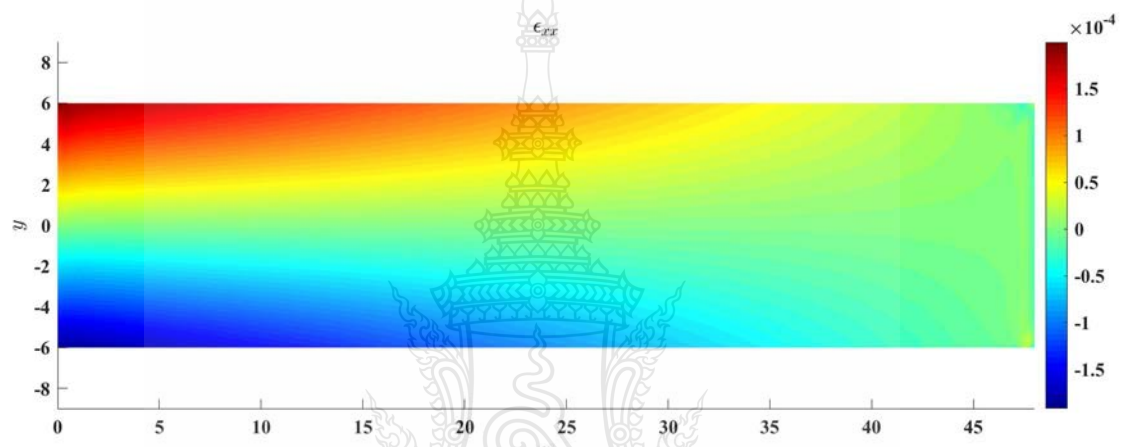
รูปที่ 37 ความเค้นตึงฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 40X10



รูปที่ 38 ความเค้นตึงฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคานที่โครงตาข่าย 48X12



รูปที่ 39 ความเค้นตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคาน (โครงตาข่ายขนาด 48X12)



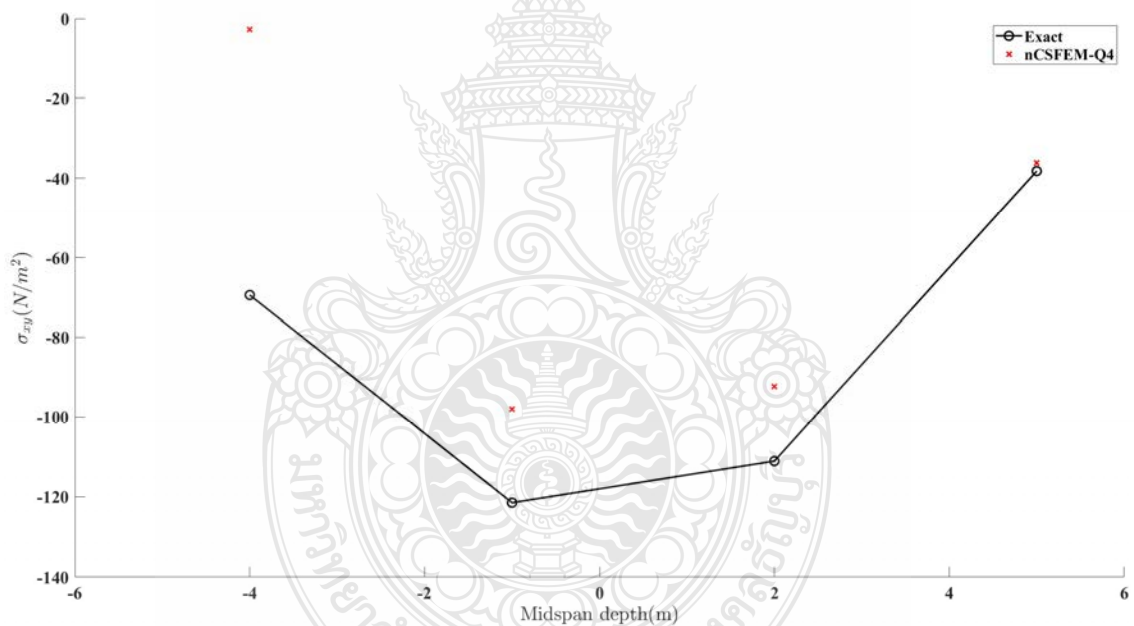
รูปที่ 40 ความเครียดตั้งฉาก ณ ตำแหน่งหน้าตัดบริเวณกึ่งกลางคาน (โครงตาข่ายขนาด 48X12)



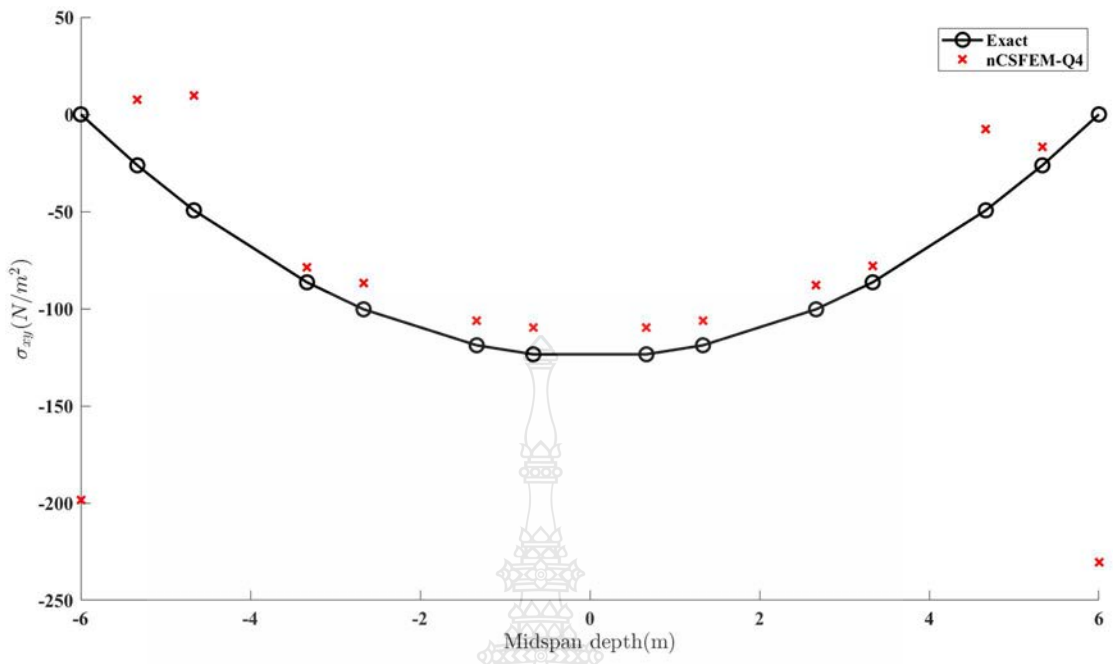
4.3 ความเค้นเฉือน (Shear stress)

ความเค้นเฉือนสำหรับใช้ในการเปรียบเทียบนี้ พิจารณาที่บริเวณหน้าตัดเดียวกันกับค่าของความเค้นตั้งฉากในหัวข้อที่ผ่านมา ลักษณะของความเค้นเฉือนที่ได้จากการวิเคราะห์ มีแนวโน้มเดียวกับค่าความเค้นปกติ กล่าวคือ มีความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ในระดับดีมากเมื่อเทียบกับผลของการคำนวณทางทฤษฎี เช่นเดียวกับกับกรณีของความเค้นปกติในหัวข้อที่ผ่านมา ค่าดังกล่าวมีความเบี่ยงเบนจากค่าทางทฤษฎีสูงในโหนดบริเวณขอบทั้งสองด้านของปัญหาเนื่องด้วยเหตุผลเดียวกับที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4.2

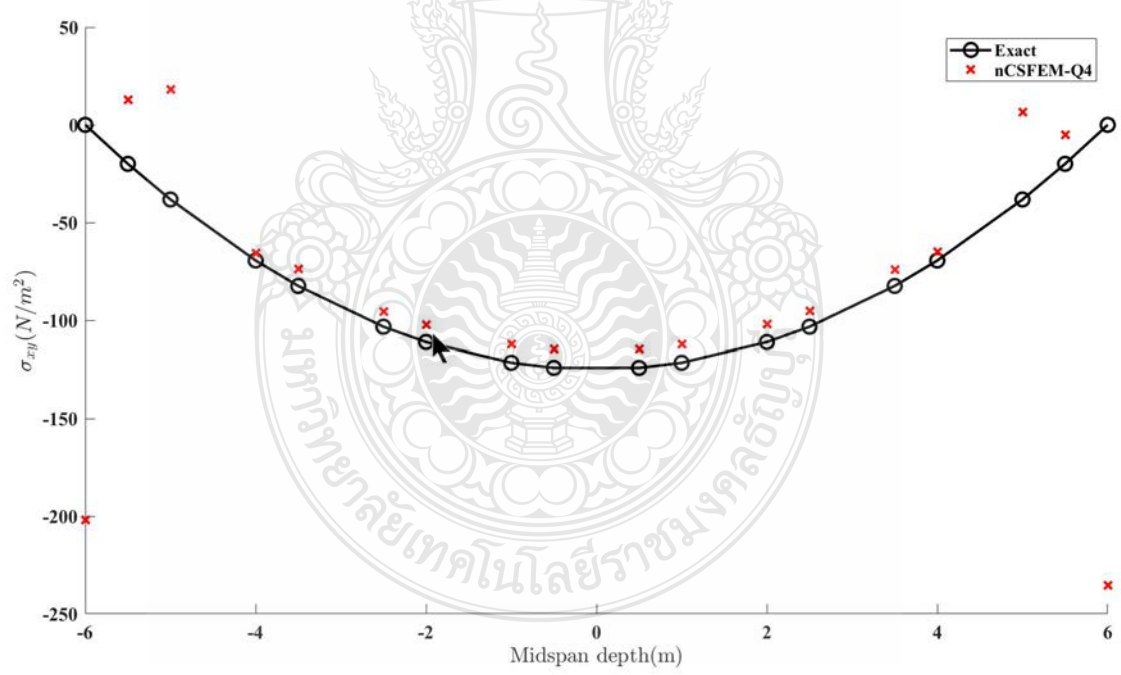
ค่าความเค้นเฉือนดังกล่าวจะนำมาพล็อตกราฟ โดยแกนในแนวนอนเป็นค่าความเค้นเฉือนส่วนแกนในแนวตั้งเป็นค่าความลึกของหน้าตัดคาน เปรียบเทียบค่าที่ได้จากวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์ (nCSFEM-Q4) กับค่าทางทฤษฎี (Exact Solution) พบว่าค่าความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคานที่ระยะ $L/2$ จะมีค่าเข้าใกล้กับค่าทางทฤษฎียิ่งขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 41-45 โครงตาข่ายถูกแบ่งให้มีความละเอียดขนาด 16×4 , 24×6 , 32×8 , 40×10 และ 48×12 ตามลำดับ



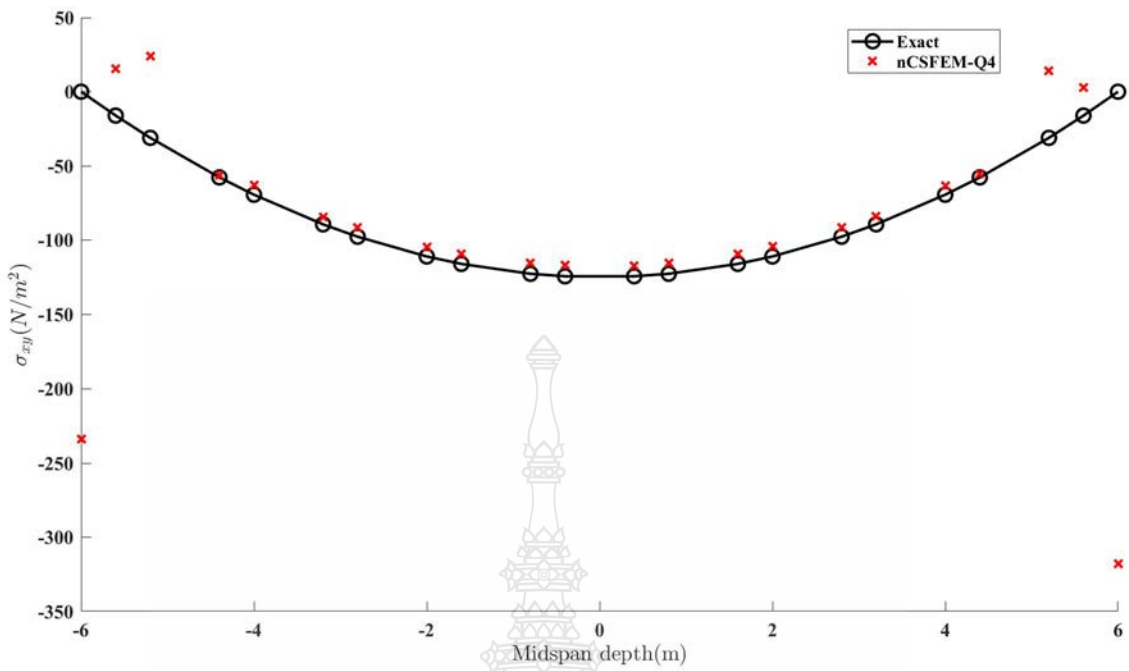
รูปที่ 41 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน ($L/2$) ที่โครงตาข่าย 16×4 ขยายสเกลแกน X ให้ถึง 6 และ -6



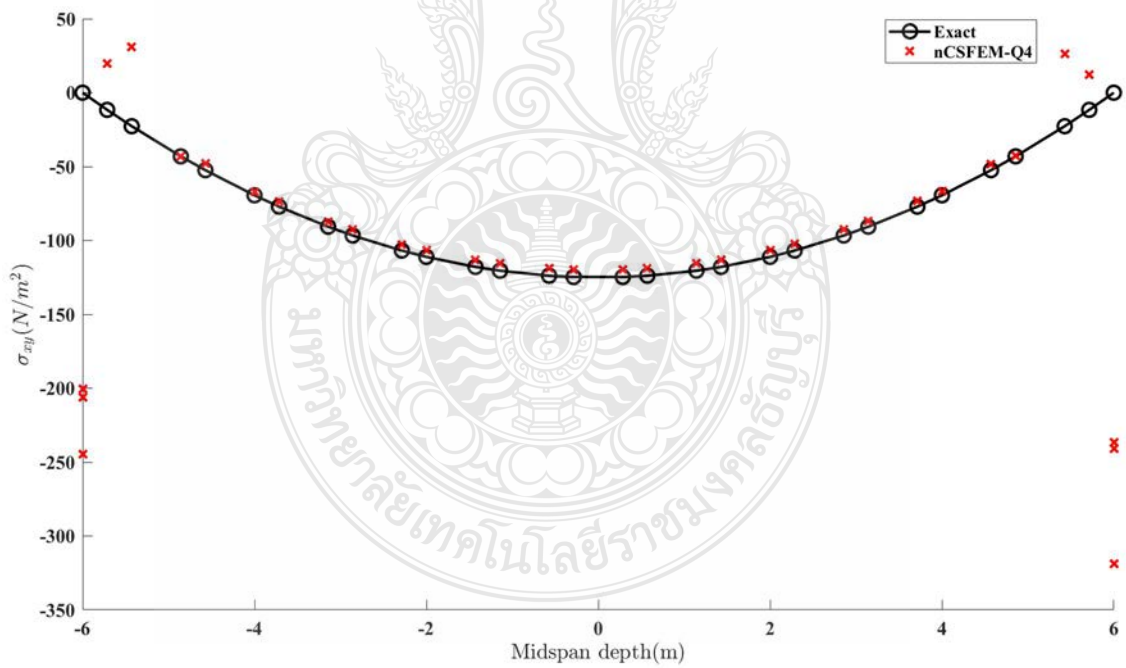
รูปที่ 42 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 24X6



รูปที่ 43 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 32X8



รูปที่ 44 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 40X10



รูปที่ 45 ความเค้นเฉือน ณ หน้าตัดกึ่งกลางคาน (L/2) ที่โครงตาข่าย 48X12

บทที่ 5

สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิเคราะห์สมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบการสร้างเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมแล้วจึงทำการแบ่งเอลิเมนต์หลักเหล่านั้นออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยรูปทรงสี่หน้า (nCSFEM-Q4) สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบของคานยื่นปลายที่รับแรงเฉือนรูปพาราโบลากระทำที่ปลายอิสระนี้ ได้แสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้เมื่อเทียบกับทั้งผลเฉลยทางทฤษฎีหรือผลจากวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วว่า ไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญถึงทศนิยมตำแหน่งที่ห้า ทั้งในส่วนของ การเปลี่ยนตำแหน่งรวมทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนตามลำดับ แนวโน้มของความแม่นยำที่ได้มีลักษณะเช่นเดียวกันกับวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวคือ มีค่าเพิ่มขึ้นตามจำนวนของโครงตาข่ายที่เพิ่มขึ้น ในกรณีนี้ ที่ความละเอียดของโครงตาข่ายสูงสุด ความแม่นยำผลลัพธ์ของวิธีที่นำเสนอ มีค่ามากกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ T3 และอยู่ในระดับเดียวกับไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 นอกจากนี้ ทั้งค่าของความเค้นปกติและความเค้นเฉือน ณ ตำแหน่งของโหนดบริเวณขอบบนและขอบล่างที่ได้นั้น มีความคลาดเคลื่อนกับค่าที่ได้ทางทฤษฎีอยู่บ้าง จึงตั้งเป็นข้อสังเกตสำหรับงานวิจัยต่อไปได้ว่า ควรหลีกเลี่ยงการใช้เอลิเมนต์ดังกล่าวบริเวณขอบของปัญหาที่กำลังพิจารณาเพื่อลดความผิดพลาดของการคำนวณความเค้นในบริเวณดังกล่าว

ถึงแม้ว่าความแม่นยำของการคำนวณดังกล่าว ไม่ได้มากไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Q4 ซึ่งถือได้ว่าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างมากสำหรับปัญหาความเค้นในระนาบปกติก็ตาม แต่สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบแบบอื่น ๆ เช่น ปัญหาความเค้นในระนาบของแผ่นที่มีรูเจาะ ปัญหาความเค้นในระนาบของแผ่นที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเช่นแผ่นรูปตัวแอล เป็นต้น หรือปัญหาความเค้นในระนาบของคานแบบเซลล์ลาร์ (castellated beam) ซึ่งมีสภาพของความเค้นขมขม (stress concentration) ในบางตำแหน่ง รวมทั้งปัญหาของการแตกหัก (fracture mechanics) ซึ่งเกิด stress singularity ที่ปลายรอยแตก ปัญหาประเภทนี้ ต้องใช้การแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กเพียงพอที่จะสามารถทำนายพฤติกรรมที่ถูกต้องได้อย่างแม่นยำหรือใช้วิธีอื่น ๆ เช่น XFEM (Extended Finite Element Method) เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์ การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาดเล็ก ด้วยวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์รอบ ๆ บริเวณดังกล่าว ในขณะที่บริเวณอื่น ๆ ซึ่งไม่ได้รับผลกระทบนั้น ยังคงใช้โครงตาข่ายแบบทรงเหลี่ยมสี่หน้าตามปกติ ดูเหมือนจะเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์ที่ได้เป็นอย่างดี ประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมนี้คือการวิเคราะห์ปัญหาที่มีหลายโดเมน (multiple domains) ซึ่งแต่ละโดเมนอาจจะมีคุณสมบัติทางรูปทรงเรขาคณิตและคุณสมบัติทางกลที่ไม่เหมือนกัน หากโดเมนเหล่านี้ มีการสร้างโครงตาข่ายที่มีรูปร่างแตกต่างกัน และอาจนำไปสู่ความไม่เข้ากันของโครงตาข่ายที่บริเวณรอยต่อ (non-matching mesh) ระหว่างโดเมนย่อยเหล่านั้น เนื่องจากเอลิเมนต์หลักของวิธีสมูทไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ไม่

ต้องการ mapping ไปยัง parent element จึงสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้อย่างไม่มีข้อจำกัดและเป็นหัวข้อวิจัยที่น่าสนใจอย่างยิ่ง

5.2 ประโยชน์และข้อเสนอสำหรับงานวิจัยในอนาคต

5.2.1 เนื่องจากค่าของความเค้นและความเครียด ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีสมูทไฟไนท์เอลิเมนต์แบบการสร้างโดเมนย่อยภายในเอลิเมนต์หลักรูปหลายเหลี่ยมของโหนดที่อยู่บริเวณขอบเขตของปัญหามีความคลาดเคลื่อนมากกว่าค่าที่คำนวณได้จากทางทฤษฎี จึงควรทำการศึกษา อัตราส่วนระหว่างความยาวต่อความลึกของคานตัวอย่าง (L/D) ที่ขนาดต่างๆกัน

5.2.2 ควรทำการศึกษาประเด็นเพิ่มเติมสำหรับ กรณีของปัญหาของแข็งที่มีความไม่ต่อเนื่องภายในโดเมนขอบเขตของปัญหา เช่น แผ่นที่มีรูเจาะทรานเซลลูลาร์ (Castellated Beam) เป็นต้น

5.2.3 ควรทำการศึกษาปัญหาความเค้นหรือปัญหาความเครียดในระนาบ Plane Stress หรือ Plane Strain โดยพิจารณาใช้การสร้างเอลิเมนต์ รูปหลายเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม (algorithm) อื่นๆ เพื่อเปรียบเทียบกับอัลกอริทึมที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์เล่มนี้

5.2.4 ควรทำการศึกษาเพิ่มเติมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง (Solid Mechanics) แบบพลศาสตร์ (Dynamic Analysis) สำหรับความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) โหมดรูปร่าง (Mode Shape) รวมทั้งการสั่นสะเทือนแบบแรงกระทำชั่วขณะ (Transient Vibration Analysis)



บรรณานุกรม

- [1] Dow, John O., Michael S. Jones, and Shawn A. Harwood. "A new approach to boundary modelling for finite difference applications in solid mechanics." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30, no. 1 (1990): 99-113.
- [2] Demirdžić, Ismet, and Samir Muzaferija. "Finite volume method for stress analysis in complex domains." *International journal for numerical methods in engineering* 37, no. 21 (1994): 3751-3766.
- [3] Bathe, Klaus-Jurgen. "Finite Element Procedures Prentice-Hall." New Jersey 1037 (1996): 1.
- [4] Zienkiewicz, Olek C., Robert L. Taylor, and Jian Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.
- [5] Hughes, Thomas JR. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.
- [6] Brebbia, C. A., and D. Nardini. "Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure." *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 2, no. 4 (1983): 228-233.
- [7] Lee, Usik. *Spectral element method in structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [8] Atluri, Satya N., and S. Shen. *The meshless method*. Encino: Tech Science Press, 2002.
- [9] Sukumar, Natarajan, and A21015991073 Tabarraei. "Conforming polygonal finite elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61, no. 12 (2004): 2045-2066.
- [10] Cottrell, J. Austin, Thomas JR Hughes, and Yuri Bazilevs. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [11] Chongmin Song. The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation. John Wiley & Sons, 2018.
- [12] Beirão da Veiga, L., Franco Brezzi, Luisa Donatella Marini, and Alessandro Russo. "The hitchhiker's guide to the virtual element method." *Mathematical models and methods in applied sciences* 24, no. 08 (2014): 1541-1573.
- [13] Liu, Gui-Rong, and Nguyen Trung. "Smoothed finite element methods." (2016).
- [14] Logan, Daryl L. "A first course in the finite element method." (2016).
- [15.] Arthur P. Boreisi, Richard J. Schmidt. *Advanced Mechanics of Materials*. John Wiley & Sons, 2002.
- [16.] Turner, M. Jon, Ray W. Clough, Harold C. Martin, and L. J. Topp. "Stiffness and deflection analysis of complex structures." *journal of the Aeronautical Sciences* 23, no. 9 (1956): 805-823.
- [17.] Jacob, Fish, and Belytschko Ted. *A first course in finite elements*. Wiley, 2007.
- [18.] Cook, Robert D. *Concepts and applications of finite element analysis*. John wiley & sons, 2007.
- [19.] Liu, Gui-Rong, and Nguyen Trung. *Smoothed finite element methods*. CRC press, 2016.
- [20.] Liu, Gui-Rong. "The smoothed finite element method (S-FEM): A framework for the design of numerical models for desired solutions." *Frontiers of Structural and Civil Engineering* 13, no. 2 (2019): 456-477.
- [21] Wachspress, Eugene L. "A rational basis for function approximation." In *Conference on Applications of Numerical Analysis*, pp. 223-252. Springer, Berlin, Heidelberg, 1971.
- [22] Wachspress, Eugene L. "A rational finite element basis." (1975).

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [23] Dai, Ke-Yang, Gui-Rong Liu, and Thoi-Trung Nguyen. "An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics." *Finite elements in analysis and design* 43, no. 11-12 (2007): 847-860.
- [24] Liu, G. R., T. Nguyen-Thoi, H. B. Nguyen-Xuan, and K. Y. Lam. "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems." *Computers & structures* 87, no. 1-2 (2009): 14-26.
- [25] Nguyen-Thoi, T., G. R. Liu, and H. Nguyen-Xuan. "An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics." *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 27, no. 9 (2011): 1446-1472.
- [26] Nguyen-Thoi, Trung, Phuc Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and Q. Lieu-Xuan. "A smoothed coupled NS/nES-FEM for dynamic analysis of 2D fluid–solid interaction problems." *Applied Mathematics and Computation* 232 (2014): 324- 346.
- [27] Sellam, M., S. Natarajan, and K. Kannan. "Smoothed polygonal finite element method for generalized elastic solids subjected to torsion." *Computers & Structures* 188 (2017): 32-44.
- [28] Kim, Jungdo, and Seyoung Im. "Polygonal type variable-node elements by means of the smoothed finite element method for analysis of two-dimensional fluid-solid interaction problems in viscous incompressible flows." *Computers & Structures* 182 (2017): 475-490.
- [29] Biabanaki, S. O. R., and A. R. Khoei. "A polygonal finite element method for modeling arbitrary interfaces in large deformation problems." *Computational Mechanics* 50, no. 1 (2012): 19-33.

บรรณานุกรม (ต่อ)

- [30] Biabanaki, S. O. R., A. R. Khoei, and P. Wriggers. "Polygonal finite element methods for contact-impact problems on non-conformal meshes." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 269 (2014): 198-221.
- [31] Khoei, A. R., R. Yasbolaghi, and S. O. R. Biabanaki. "A polygonal finite element method for modeling crack propagation with minimum remeshing." *International Journal of Fracture* 194, no. 2 (2015): 123-148.
- [32] Katili, Irwan, Imam Jauhari Maknun, Andi Makarim Katili, Stéphane PA Bordas, and Sundararajan Natarajan. "A unified polygonal locking-free thin/thick smoothed plate element." *Composite Structures* 219 (2019): 147-157.
- [33] Katili, Irwan. "A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields—part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36, no. 11 (1993): 1885-1908.
- [34] Ooi, Ean Tat, Chongmin Song, Francis Tin-Loi, and Zhenjun Yang. "Polygon scaled boundary finite elements for crack propagation modelling." *International journal for numerical methods in engineering* 91, no. 3 (2012): 319-342.
- [35] Timoshenko, S., and J. N. Goodier. "Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Company." Inc. New York (1951).

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นางสาว ณัฐยา เสียงใส
วัน เดือน ปีเกิด 02 มิถุนายน 2534
ที่อยู่ 7/261 ตำบลคูคต อำเภอลำลูกกา จ.ปทุมธานี 12130
การศึกษา ปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมโยธา
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ประสบการณ์การทำงาน ปัจจุบันทำงาน บริษัท แอ็ดวานซ์ เอ็นเนอร์ยี ดีเวลลอปเม้นท์ จำกัด
วิศวกรโยธา
เบอร์โทรศัพท์ 098-2684729
อีเมล nathaya_s@mail.rmutt.ac.th

